9.9.507

Digitized by Google

A

Digitized by Google

# INSTITUTIONES ARITHMETICÆ

PAULINI A S. JOSEPHO

L U C E N S I S

Cler. Reg. Schol. Piar. & in Archigymnaſio
Romano Eloquentiæ Profeſſoris;

*QUIBUS ACCEDIT*

PRAXEΩN CHRONOLOGICARUM

*APPENDIX.*

*DOMINICUS TERRES*

*EDIDIT*

APUD VINCENTIUM URSINUM

N E A P O L I

MDCCLXXVIII.

*Superiorum Auctoritate ac Privilegio.*

Digitized by Google

# AD LECTOREM.

*PAuci ſunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea pleriſque vileſcit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expenſique tabulas conficiunt, artem eſſe putent. At longe aliter de illa viri ſapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomide affirmat, ſine Arithmetica neque ullam ſcientiam, neque ipſam hominum ſocietatem poſſe conſiſtere. Ariſtoteles autem exiſtimabat, tam proprium eſſe hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Auguſtinus, qui frequentiſſime ſuis in libris, præſertim vero de Doctrina Chriſtiana, præclare de Arithmetica loquitur, multiſque exemplis oſtendit, ob numerorum inſcitiam, plurima in ſacris litteris ignorari? In eadem prorſus ſententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex lib. 2. contra Jovinianum, aliiſque ex locis palam eſt; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui Divum Baſilium præceptorem ſuum ſummis laudibus celebrat, quod is numerorum ſcientia ad ſa-*

*ſacræ Scripturæ intelligentiam, aliaſque diſciplinas ſibi viam munivisſet. Illud certe negari non poteſt, ab iis, qui Arithmeticæ ſtudia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Phyſicæ ſtudia, hoc eſt diſciplinarum omnium ſuccum & ſanguinem, contemni omnino oportere: cum fieri non poſſit, ut hæc, quæ mirabili quodam ordine ac numerorum proportione inter ſe cohærent, ſine ſcientia numerorum intelligantur. Quis enim ſine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum ſimilium rationes, reſiſtendi vires, ſonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac ſexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem ſcientiam eum latere neceſſe eſt? Itaque non immerito Plato in lib. 7. de Repub. Arithmeticam vocat veſtibulum ſcientiarum, quod ſcilicet numerorum tractatione ſpeculationibus difficilioribus animus aſſueſcit, & ad reliquos ſcientiæ ſatus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipſa numerandi vi fauſtum ad ceteras diſciplinas progreſſum auguratur.* Homines, *inquit*, natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur.

*Hinc*

*Hinc eſt, quod multi in omni memoria viri doctiſſimi in ordinandis illuſtrandiſque Arithmeticæ elementis deſudarunt, quod eorum utilitatem ſummamque neceſſitatem probe noſſent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpſi in uſum ſtudioſæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Matheſeos ſtudia neceſſaria eſſe judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejuſdem Collegii adoleſcentes in Mathematicis diſciplinis inſtitui, Arithmeticæ ſtudium præmiſi, cujus ope tum* II., *tum* V. & VI. *Elementorum Euclidis propoſitiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica deſtitutos in ipſis diu multoque labore verſari. Cum autem decurſu temporis in ea ſcripta per manus tradita multa menda, ut fieri ſolet, irrepſiſſent, multoque labore, ac tempore in illis tranſcribendis opus eſſet, res non inutilis viſa eſt, illa typis emittere; eaque occaſione adjecta eſt doctrina de natura atque uſu Logarithmorum; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæſtiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent,*

*quæ ſane in vita civili haud ſemel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitate, & exemplorum copia ſatis claræ eſſe videntur, accedunt quoque demonſtrationes, quales in hujus ſcientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propoſitionem citare, aut ſupponere, opportunum viſum eſt. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam & vulgarem putavi: demonſtrationes autem adhibere ex Euclidis elementis* VII. VIII., & IX.; *vel etiam ab Analyſeos ſpecioſæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti noſtræ rem immaturam. An vero in medio conſtiterim, ſapientum eſto judicium.*

---

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE
*Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Schol. Piar.*
PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Inſtitutiones Arithmeticæ &c.* a P. Paulino a S. Joſeph Aſſiſtente Generali Scholarum Piarum duo ex noſtris, quibus commiſſum fuit, recognoverint, atque approbaverint; ut typis mandetur, ſi iis, ad quos ſpectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus noſtris Scholarum Piarum apud Sanctum Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

JOSEPH AB ANG. CUSTODE PRÆP. GEN.
*Laurentius a S. Hyacinto Secret.*

INSTITUTIONES

# ARITHMETICÆ.

## DEFINITIONES.

I. ARITHMETICA eſt ſcientia numerorum, cujus partes ſunt quatuor : *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio*.

II. *Unitas* eſt denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* eſt unitatum multitudo, proinde unitas non eſt numerus, ſed numeri principium, ſicuti punctum eſt principium lineæ.

IV. *Numeri ſimplices* ſunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cifra o, quæ per ſe nihil ſignificat, ſed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compoſiti* ſunt numeri majores denario, incluſo ipſo denario, ſcilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor me-

metitur majorem, hoc eſt cum minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit; ſeu cum major minorem aliquoties præciſe continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 ſexies ſumptus æqualis fit ipſi 12; ſeu quia 12 ſexies præciſe continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri eſt, quæ numerum metitur, *pars aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4 dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipſius, quia aliquoties ſumpta vel ipſum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter ſe primi* ſunt, quos nulla communis menſura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* eſt habitudo, ſeu ratio quædam unius numeri ad alterum, ſecundum quod unus alterius eſt multiplex, vel pars, ſeu partes; ſic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, ſeu ſemiſſis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* ſunt illi, quorum unitates eandem rem ſignificant.

XI. *Numeri heterogenei*, ſeu *denominati* ſunt, qui variis nominibus denominantur, hoc eſt res diverſas ſignificant, ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri* alii ſunt *integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, ſeu unitatis, de quibus in Cap. III.

Schol. *Has notas* Arithmeticas, *antiquis prorſus incognitas, in Hiſpaniam Mauri deportarunt; inde in Galliam, aliaſque Europæ gentes induxit ſæculo* x. *Gerbertus Monachus Aureliacenſis, vir doctus, qui poſtea fuit Pontifex Silveſtri II. nomine.*

CA-

# CAPUT I.

## *De Calculo Integrorum*.

### PROPOSITIO I.

*Dati numeri valorem exprimere*.

I. Sit exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, ſecernendo virgula ternas quaſcunque figuras, incipiendo a dextera; diviſus erit numerus *A* in tres periodos, ſeu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: ſed prima dextrorſum continet unitates, decades, & centenas ſimpliciter; ſecunda vero continet unitates, decades, & centenas millium; tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

*A* 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo ſiniſtrorſum, & progrediendo verſus dexteram ſic: trecenti nonaginta quatuor milliones, octingenta ſeptuaginta quinque millia, quadringenta ſexaginta duo. Similiter numerus *B* diviſus, ut ſuperius dictum eſt, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia.

*B* 124, 002, 000.

Demum numerus C exprimit milliones 100.

C 100, 000, 000.

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita proce-

cedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas diſtribuatur in membra, ut ſuperius factum eſt. 2. Super notam primam dextrorſum ponatur una cifra o, intermiſſiſque quinque figuris, ſupra notam ſeptimo loco poſitam ponatur unitas 1. Item poſt quinque iterum notas ſcribatur 2, atque ita deinceps, relictis ſemper quinque notis, ſcribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet membrum continet ſex notas, (præter primum ad ſiniſtram, quod aliquando continere poteſt 2, 3, 4, aut 5 notas). Exprimendæ ſunt igitur ſimul ſex illæ notæ; prolataque integra periodo, toties repetenda eſt vox hæc *millio*, quot ſunt unitates, quæ continentur ſupra primam notam talis periodi. Virgulæ autem appoſitæ *millia* ſignificant, ut exemplis ſequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

2 . 1 0

*D* 52, 329, 189, 602, 800.

Quinquaginta duo milliones millionum, tercentum viginti novem millia, centum octoginta novem milliones, ſexcenta duo millia, octingenta.

3 2 1 0

*E* 45, 928, 634, 426, 350, 872, 385, 173

Quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo milliones millionum millionum, ſexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti ſex milliones millionum, trecenta quinquaginta millia, octingenti ſeptuaginta duo milliones, trecenta octoginta quinque millia ac centum ſeptuaginta tres.

Schol. I. *Si cui moleſtum ſit iterare toties vocem illam* millionum, *utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda eſt vox millionum bis, dicat* bilionum*: uti ter, dicat* trilionum*: ubi quater*, quadrilionum *&c. adeoque*

*que ſuperius exemplum efferri poteſt ſic : quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo* triliones, *ſexcenta triginta quatuor millia , quadringenti viginti ſex* biliones, *trecenta quinquaginta millia &c.*

Schol. II. *Præter valorem ſimplicem , quem ſingulæ notæ Arithmeticæ habent proprium , alium inſuper habent ratione loci, quem occupant : qui valor procedit in proportione ſubdecupla. Itaque nota primo loco , a dextris incipiendo , poſita ſignificat unitates , ſecundo loco poſita ſignificat tot decades, quot unitates habet ; tertio loco tot centenas , quarto loco millia , quinto loco dena millia , ſexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant neceſſe eſt. Ecce exemplum :*

1 3 4 6 5 9 2.
| | | | | | 2. duo.
| | | | | 9 0. nonaginta.
| | | | 5 0 0. quingenta.
| | | 6 0 0 0. ſex millia.
| | 4 0 0 0 0. quadraginta millia.
| 3 0 0 0 0 0. trecenta millia.
1 0 0 0 0 0 0. decies centena millia, ſeu millio.

1 3 4 6 5 9 2.

## PROPOSITIO II.

### *De Additione Integrorum.*

I. *Additio* eſt plurimorum numerorum in unam ſummam collectio. Numeri addendi vocantur *dati* ; numerus, qui ex additione confluatur, dicitur *ſumma*, ſeu *aggregatum* . Additio procedit a dextra in ſiniſtram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim , ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem ſibi reſpondeant. 2. Du-

2. Ducta linea, numeros ſub eadem columna poſitos in unum collige; & ſi novem non excedant, ſubſcribe quotquot ſunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, ſubſcribe id, quod remanet ſupra decades, & adde ſequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

*Sit exemplum*: Quæritur quot anni elapſi ſint ab orbe condito uſque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo *tom.* 2. *lib.* 13. *de Doctrina Temporum* numerantur,

| | D | C | B | A |
|---|---|---|---|---|
| Ab Adamo ad finem diluvii anni | 1 | 6 | 5 | 6 |
| A fine diluvii ad Chriſtum | 2 | 3 | 2 | 7 |
| A Chriſto ad annum 1742 | 1 | 7 | 4 | 2 |
| Summa | 5 | 7 | 2 | 5 |

Nam primo unitates 2, 7, 6, in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanent 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reſervo 1 pro ſequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, ſunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ C cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro ſequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ ſcribo infra lineam, & habetur ſumma quæſita 5725.

*Sit aliud exemplum*. Addendæ ſunt in unam ſummam plures accepti, vel expenſi ſummæ *A*, *B*, *C*.

*A*

| | | |
|---|---|---|
| *A* 104 | *B* 7245 | C 235 |
| 741 | 3280 | 7348 |
| 892 | 834 | 9532 |
| 1380 | 1273 | 780 |
| *E* Sum. 3117 | Sum. 12632 | Sum. 17895 |

Peracta operatione, habetur ſumma *E* 3117; ubi patet, cifras o in additione nihil addere, nam o, 2, 1, 4 faciunt 7.

II. Præter uſitatum additionis explicatæ modum, eſt alter, in quo operatio procedit a ſiniſtra verſus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, ſed tota ſumma ſtatim infra lineam deſcribitur. Addendi ſint numeri *A*, *B*, *C*.

| | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 9 | 6 | 6 |
| *B* | 7 | 3 | 4 | 5 |
| C | 9 | 2 | 8 | 9 |
| *D* 1 | 7 | 4 | 8 | 0 |
| *E* | 1 | 1 | 2 | |
| *X* 1 | 8 | 6 | 0 | 0 |

1. Incipiens a ſiniſtra, quæ hic millia ſignificat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17, quem totum ſcribo ſub ipſa columna millium *F*.

2. Colligo centena ſecundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate ſub linea, ſed 1 ſub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 ſua columna *H*, & unitates 20 ſub columna *I*.

3. Ducta linea, altera fit additio ordinum *D* & *E*, & habetur ſumma quæſita *X*. De-

*Demonſtr.* Additionis ratio manifeſta eſt ex *Axiom.* 9. *lib.* 1. *Eucl.* nempe totum æquale eſſe omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Tot enim ſunt unitates, decades, centena, ac millia exiſtunt in ſummis ſingulis datis *A*, *B*, *C*. Nam ſi colligantur unitates ſub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc eſt decades 2, proinde ponitur 0, & reſervantur 2 illæ decades ad propriam ſedem decadum *H*. Similiter decades collectæ ſub columna *H* ſunt 18, quæ additis duabus prioribus, faciunt 20, hoc eſt centena 2, adeoque ponitur 0, & reſervantur 2 ad ſequentem ſeriem. Sub columna tertia *G* ſunt 14 centena, quibus ſi addantur 2 præcedentia, ſunt 16. Ponitur itaque 6, & reſervatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ F ſunt 17, quæ cum præcedenti 1 ſunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in ſumma *X* contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A*, *B*, *C*, Quod totum patet ad oculum, ſcilicet

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *F* | *G* | *H* | *I* | | |
| | *A* | 1 | 9 | 6 | 6 | | |
| | *B* | 7 | 3 | 4 | 5 | | |
| | *C* | 9 | 2 | 8 | 9 | | |
| *Unitates* | | | | 2 | 0 | | 20 |
| *Decades* | | | 1 | 8 | . | | 180 |
| *Centena* | | 1 | 4 | . | . | | 1400 |
| *Millena* | 1 | 7 | . | . | . | | 17000 |
| | *X* | 1 | 8 | 6 | 0 | 0 | *X* 18600 |

PRO-

# PROPOSITIO III.

*Additionem examinare.*

Multiplici ratione fieri poteſt examen.

1. Eandem additionem repete, ſed ordine mutato, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas: nam ſi utraque ſumma inventa eadem fuerit, probabile eſt, nullum errorem irrepſiſſe.

2. A numeris addendis abjicitur 9 quoties poteſt, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & reſiduum notatur in angulo crucis: Abjectiſque deinde 9 ex ſumma *A*, ponitur reſiduum in altero angulo; quæ reſidua ſi fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet ſequenti exemplo:

| | |
|---|---|
| | 4 8 2 4 |
| | 5 7 2 1 |
| | 3 4 0 2 |
| *A* | 1 3 9 4 7 |

| | |
|---|---|
| 6 | |
| | 6 |

Hoc examen male audit, ut fallax, nam ſi pro ſumma *A* alia longe major ponatur 19347, iiſdem numeris ordine mutato conſtans, aut ſi eidem ſummæ *A* addas quotcunque volueris cifras 0, ſemper remanet, abjectis novenariis, idem reſiduum 6. Ceterum ob ſummam ejus facilitatem non eſt rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros ſeptenarios e qualibet ſumma particulari *A*, *B*, *C*, & ponendo ſeorſim reſiduum ut in *E*. Abjectiſque deinde 7 ex utraque ſumma *M*, & *N*, ſi reſidua in utroque angulo crucis poſita æqualia ſint, res bene proceſſit.

Eſt

Digitized by Google

Eſt autem diſcrimen inter hoc, & ſuperius examen. Numerus 9 abjicitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abjiciam 9 ex 134, ſufficit addere ſimul 4 cum 3 & 1, & habetur ſtatim novenarii reſiduum 8. At ſi abjicere velis 7 ex eodem 134, procedendum eſt per decades, abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & reſiduum eſt 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *A* 3 4 5 6 | *E* 5 | | |
| *B* 7 2 0 1 | 5 | 3 | |
| *C* 3 4 5 8 | 0 | — | — |
| *M* 1 4 1 1 5 | *N* 1 0 | | 3 |

Hoc quoque examen aliquando fallit, ſed raro. Ratio autem utriuſque examinis deſumitur ex *Axiom. 3. lib.* 1. *Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, reſidua ſunt æqualia.

## PROPOSITIO IV.

### *De ſubtractione Integrorum.*

*Subtractio* eſt inventio exceſſus, quo numerus major ſuperat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor ſub majori, a quo debet ſubtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis reſpondeant, ut de additione dictum eſt *Prop.* 2.

2. Ducta linea, & dextrorſum incipiendo, auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, ſcribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior ſubduci non poteſt a ſuperiori, quia illo major eſt, intelligatur addita numero ipſi ſuperiori decas, factaque ſubtractione, pona-

natur reſiduum infra lineam: ſed deinde numerus ſuperior, qui ſequitur, unitate minuitur, vel ( idem enim eſt ) ſubſequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum ſi numerus inferior ſit ſuperiori numero æqualis, ponitur infra lineam o; vel linea —, ſi id contingat in fine operationis.

*Sit exemplum*. Debet quis alteri aureorum ſummam *A*, non habet niſi aureorum ſummam *B* ſolvendam, quærit quantum de ære alieno ſuperſit.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 9 | 2 | 5 |
| *B* | 1 | 3 | 8 | 2 |
| C | — | 5 | 4 | 3 |

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Deinde 8 ſubduci non poteſt ex 2, intellige decadem additam ipſi 2, fiet 12, ex quo aufer 8, remanent 4, ſcribenda infra lineam. At ſubſequens numerus ſuperior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde ſubductis 4 ex 9, reſiduum eſt 5, quod ſcribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1, nihil remanet, ſcribe lineam. Debebit igitur adhuc aureos 543, cum talis ſit exceſſus numeri majoris *A* ſupra minorem *B*.

Similiter ſubduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur exceſſus, ſeu reſiduum *X*.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M* | 6 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 7 |
| *N* | | 3 | 1 | 9 | 5 | 7 | 6 | 8 | 4 |
| *X* | | 5 | 8 | 8 | 0 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 |

Aufer 4 ex 7, reſiduum eſt 3. Item 8 ex 12, reſiduum eſt 4. Pariter 7 ex 10, reſiduum eſt 3. Similiter 8 ex 10, reſiduum eſt 2, tum 6 ex 11, re-

ſiduum eſt 5, & 10 ex 10, reſiduum eſt 0 &c.

*Examen ſubtractionis* generatim fit addendo reſiduum $X$ numero minori ſubtracto $N$. Nam ſi erratum non ſit, reſtituitur major numerus $M$, ut patet.

Examen fieri quoque poteſt per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex $A$, quantum abjici poteſt, reſiduum eſt 8. Deinde abjecto novenario ex numeris $B$ & $C$, æqualibus ipſi $A$, reſiduum pariter eſt 8.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 6434 | | 8 | |
| $B$ | 521 | | | |
| $C$ | 5913 | | | 8 |

*Demonſtr.* ſubtractionis per ſe patet. Nam ex *Defin.* ſubtractio eſt inventio exceſſus, quo numerus major ſuperat minorem, proinde exceſſus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent eſſe in $B$, & $C$ ſimul, quot ſunt in $A$. Sed ſubducendo 1 ex 4, ponitur reſiduum 3. Sunt ergo tot unitates in $B$, & $C$ ſimul, quot ſunt in $A$, nempe 4. Similiter ſubducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in reſiduo. Igitur decades $B$ & $C$ æquales ſunt decadibus in $A$ contentis, nempe 3, & ſic deinceps. Eſt ergo æqualitas inter $A$, & $B$ una cum $C$. Quod &c.

## PROPOSITIO V.

### *De Multiplicatione Integrorum.*

*Multiplicatio* eſt ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum eſt inventio

tio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus *A* 12 multiplicatus per *B* 3 producit numerum C 36, qui ter continet *A*, ſicuti *B* ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem eſſe compendioſam additionem; idem enim eſt multiplicare *A* per *B*, ac toties addere ipſum *A*, quot ſunt in *B* unitates.

Numeri *A* & *B* dicuntur *multiplicatores*, ſeu *factores*, numerus C *productum*, ſeu *factum*. Vulgo tamen qui minor eſt, & inferius ſcribitur, dicitur multiplicator, ſeu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura conſtet (ut in primo ſequenti exemplo) illa ducatur ſigillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextera verſus ſiniſtram; & quot productum continet decades, tot reſerventur unitates ſequenti producto adjiciendæ, & ſcribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus conſtet figuris, tunc ſingulæ ſeorſim ducantur in ſingulas numeri multiplicandi figuras, ſed producta ita infra lineam ſcribantur, ut productum ſecundæ ponatur directe ſub ipſa ſecunda figura, productum tertiæ figuræ ſub tertia, & ſic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, ſingula producta particularia in unam ſummam colligantur, ut habeatur integrum productum quæſitum.

*Sit exemplum* 1. Vendendi ſunt agni *A* juliis 5 in ſingula capita, quæritur pretium C.

| | | |
|---|---|---|
| *A* | 1 2 7 6. | *multiplicandus*. |
| | 5. | *mdltiplicans*. |
| C | 6 3 8 0. | *productum*. |

Primo 6 quinquies ſumptus facit 30, pono 0, & ſequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Deinde 7. quinquies ſumptus facit 35 : addo 3, fiunt 38, ſcribo infra lineam 8, & reſervo 3. Tum 2 quinquies ſumptus facit 10, addo 3, fiunt 13, ſcribo infra lineam 3, & ſervo 1. Demum 1 quinquies ſumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & ſcribo 6.

*Exemplum* 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere ſupponitur.

| | |
|---|---|
| *Dies* | 3 6 5 |
| *Horæ* | 2 4 |
| | 1 4 6 0 |
| | 7 3 0 |
| *Horæ* | 8 7 6 0 |

*Exemplum* 3. Ærarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum ſumma.

| | |
|---|---|
| *Opp.* | 8 2 4 |
| *Aur.* | 1 0 2 |
| | 1 6 4 8 |
| | 8 2 4 0 |
| *Aur.* | 8 4 0 4 8 |

Coroll. Hinc patet, quod ſi in multiplicatore occur-

currit cifra o, ponitur in producto cifra ( vel plures, ſi ſint ) deinde ſtatim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum.

Schol. I. *Cifræ initiales ante operationem reſecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot ſunt. Pariter ſi multiplicandus ſit numerus per* 10, *vel* 100 *e vel* 1000 *&c. ſatis eſt addere multiplicando ad dexteram tot cifras, quot continentur in multiplicatore, ſine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrunque patet exemplis* A *&* B.

| | |
|---|---|
| *A* 1 3 6 \| 0 | *B* 1 5 7 2 4 |
| 2 \| 0 0 | 1 0 0 0 |
| 2 7 2,0 0 0 | 1 5 7 2 4, 0 0 0 |

Schol. II. *Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem eſt multiplicare* 30 *per* 24, *ac* 30 *per* 4 *&* 6 *hoc eſt* 30 *per* 4, *ejuſque productum per* 6.

Schol. III. *Multiplicatio fit etiam per tabulam, quæ ab ejus auctore Pythagora vocatur* Pythagorica ( fig. 1. ). *En uſus: ſi ſcire velis productum ex. gr. ex* 3 *in* 8, *quære* 3 *in columna* AC, *&* 8 *in fronte* AB, *invenies in communi concurſu productum* 24. *Sic de ceteris. Ratio eſt, quia columna prima incipit ab unitate, & deſcendendo creſcit uſque ad* 9. *Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. ſemper uſque ad* 9 *progredientes. Prima creſcit ſola unitate, ſecunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus* 8, *qui creſcit numero octonario, habet in tertia ſede numerum* 8 *ter ſumptum, ſcilicet* 24. *Idem numerus* 8 *habet in quinta ſede* 40, *hoc eſt* 8 *quinquies ſumptum, & ſic de ceteris.*

B 3 *Fig.*

Fig. 1.

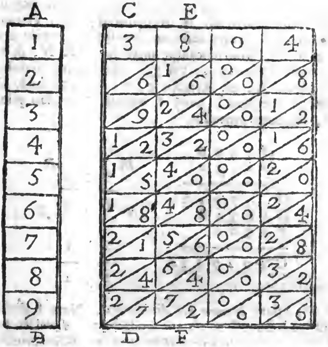
A B

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

C

Schol. IV. *Tabulam Pythagoricam in plures tabellas oblongas mobiles diſſecuit Jo: Neperus Scotus, quibus mirabili artificio multiplicationis, & diviſionis compendium exhibetur. En conſtructio: Fiant ex ære, vel ligno, aliave materia ſolida decem vel undecim tabellæ, ſeu parallelepipeda, ut ſunt* CD, EF (Fig. 2.); *quorum longitudo dividatur in* 9 *quadrata æqualia; iiſque per diametrum diviſis (excepto uno* AB, *cui inſcribuntur ſimpliciter numeri naturales* 1, 2, 3, 4 *&c. uſque ad novem incluſive, qui exponentes vocantur) habentur totidem triangula æqualia, quibus inſcribendi ſunt numeri ex ſingulis columnis ejuſdem Tabulæ Pythagoricæ; ita tamen ut in uno parallelepipedo quadrata ſuperiora habeant numeros* 1, 2, 3, 4. *In ſecundo numeros* 2, 3, 4, 5. *In tertio* 3, 4, 5, 6, *& ſic ſucceſſive. Sic enim poterit idem numerus, ſi opus ſit, iterate haberi, ex gr.* 555. *In uno, vel altero parallelepipedo ponuntur ubique cifræ. Ecce autem uſus.* *Eſto*

*Fig.* 2.




*Eſto multiplicandus* 3804. *per* 69. *Jungantur ſimul quatuor parallelepipeda, quæ in vertice referant numerum datum* 3804 ( *ut in figura* ) *præfixo ad lævam parallelepipedo* AB *exponentem*, *ex quo habentur numeri multiplicatoris* 6 *&* 9. *Jam ſingula facta numeri* 9 *in* 3804 *exhibentur in triangulis*, *& rhombis directe ad ipſum* 9 *appoſitis*, *facto initio a triangulo inferiore dextrorſum*, *& addendo numeros in rhombis poſitos*, *nempe* 34236. *Eodem modo habentur facta numeri* 6 *per* 3804, *nempe* 22824, *quæ addita*, *ut ſuperius num.* 2. *dictum eſt*, *dant productum integrum* 262476.

*Multiplicationis examen* fieri poteſt per abjectionem novenarii, aut ſeptenarii. Nam 1°. abjicitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & reſiduum ponitur in angulo crucis *M*. 2°. Rejicitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus reſiduum ponitur in angulo crucis *N*. 3°. Multiplicantur inter ſe *M* & *N*, & ex producto abjicitur 9, vel 7, reſiduumque ſcribitur in angulo *R*. 4°. Rejectis 9, vel 7 ex producto C, habetur reſiduum, quod ſi æquale ſit reſiduo priori *R*, res bene proceſſit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | | 3 | 5 | 0 | 6 | |
| *B* | | | | 1 | 3 | 2 | |
| *D* | | | 7 | 0 | 1 | 2 | |
| *E* | | 1 | 0 | 5 | 1 | 8 | |
| *F* | 3 | 5 | 0 | 6 | | | |
| C | 4 | 6 | 2 | 7 | 9 | 2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *M* | 5 | 3 | *R* |
| *N* | 6 | 3 | *T* |

| | |
|---|---|
| 6 | 1 |
| 6 | 1 |

Fit etiam *examen per diviſionem*. Nam ſi dividatur productum C per alterutrum factorem *A*, vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid ſit diviſio, de qua in ſequenti *Propoſ.*

*Demonſtr.* Cum multiplicatio ſit compendioſa additio, ut dictum eſt, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, eſt addere ipſum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012, in quo tot ſunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis ſumpto. Similiter multiplicatio ejuſdem numeri *A* per ſecundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui ſignificat 30, eſt additio ipſius *A* ſumpti trigeſies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in

*A* tri-

*A* trigeſies ſumpto. Demum productum *F* habetur ex multiplicatione numeri *A* per 1, hoc eſt per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in *F*, quot continentur *A*, ſi centies ſumatur. Igitur tres numeri *D*, *E*, *F*, ſeu productum integrum C, tot continet unitates, decades &c. quot continentur in *A* centum trigeſies, & bis ſumpto. Quod erat &c.

## PROPOSITIO VI.

### *De Diviſione Integrorum.*

*Diviſio* eſt inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet diviſorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per ſuas unitates, quoties diviſor continetur in dividendo. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, ſive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet diviſorem 3.

I. Sit diviſor numerus ſimplex 5, per quem dividendus eſt numerus datus 1580455. Ponatur diviſor ſiniſtrorſum ſeorſim poſt lineam, ut in *M*.

*Diviſor M* 5 ) 1 5 8 0 4 5 5. *dividendus*.
3 1 6 0 9 1. *quotus*.

Et procedendo a ſiniſtra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, ſubſcribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continentur in ſubſequenti numero 8, continetur ſemel, & remanent 3. Scribe 1 ſub ipſo 8, tum adde decades tres ſequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus diviſis per 5, habetur quotus 6, quem pone ſub 0. Poſtea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur 0 in quo-

quoto, & adde quatuor decades ſubſequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem ſubſcribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæſitus eſt 316091, Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fieri etiam poteſt hæc diviſio præſidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in præc. *Propoſ.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; diviſor vero in latere *AC*, & quotus in fronte *AB*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & diviſore 5 in latere *A C*, invenitur in fronte *A B* quotus 8. Quod ſi dati numeri 40 diviſor fuerit 8, invenietur in fronte quotus 5; & ſic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præciſe non reperitur, ut ſi dividendus ſit 50 per 6; ſumitur numerus proxime minor, cui directe reſpondet diviſor 6 in latere exiſtens, nempe 48, & in fronte occurrit 8, qui erit quotus quæſitus.

*Examen* hujuſce diviſionis fit multiplicando quotum per diviſorem. Si erratum non ſit, reſtituitur idem numerus, qui fuit diviſus, ut patet.

II. Quod ſi diviſor ſit numerus compoſitus, pluribus conſtans figuris, alia via procedendum. Dividendus ſit numerus datus *A* per *B*.

```
B 45 )   A 1 8 6 7 3 0
           1 8 0
          -------
C 4 1 4 9 )  - 6 7
               4 5
              -----
               2 2 3
               1 8 0
              -------
              - 4 3 0
                4 0 5
              -------
               - 2 5
```

1. Accipe ex dividendo *A* tot figuras ſiniſtrorſum, quot ſunt in diviſore *B*. Vel accipe tot figuras ex numero dato *A*, quot per diviſorem *B* dividi poſſint; ut in hoc exemplo 186, easque ſecerne puncto. Erit 186 primum diviſionis membrum.

2. Vide, quoties diviſor *B* contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoſcere haud facile eſt, vide quoties prima diviſoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 6 faciunt 26, in quo ſecunda diviſoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert ſi pluries contineatur) totus ergo diviſor 45 continetur quater in toto diviſionis membro 186, proinde pone 4 in *C*.

3. Per quotum *C* multiplica totum diviſorem *B* 45, & productum 180 ſubſcribe ipſi 186, a quo illud ſubtrahe *per Propoſ.* IV. remanent 6.

4. Ad hoc reſiduum 6 junge dextrorſum ſubſequentem dividendi figuram 7, erit 67 ſecundum diviſionis membrum; eademque omnino operatio inſtituenda eſt, quam breviter in gratiam tyronum proſequar, ſcilicet Que-

Quære quoties diviſor 45 contineatur in 67, patet contineri ſemel, ſcribe ergo in C 1, per quem multiplica totum diviſorem *B*, & productum 45 ſubſcribe ipſi 67, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 22.

Ad hoc reſiduum 22 adjunge ſequentem dividendi figuram 3, fiet tertium diviſionis membrum 223. Circa quod rurſus eadem operatio repetenda eſt.

Proinde vide quoties diviſor 45 contineatur in 223: ſeu quoties prima figura 4 contineatur in 22; patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum ſequenti figura 3 faciunt 23. Sed ſecunda diviſoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, ſi opus ſit) & reponitur 4 in *C*; per quem multiplicato diviſore *B*, habetur productum 180, quod ſubſcribe ipſi 223, ab eoque ſubtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum diviſionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda eſt. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in C major, quam 9) remanent 7, quæ cum cifra faciunt 70, in quo pariter altera diviſoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando diviſorem 45 per 9 habetur productum 405, quod ſubtrahendum eſt ab ipſo 430, & reſiduum diviſionis eſt 25. Quotus ergo quæſitus C eſt 4149, & remanent 15.

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria ſunt colligenda. 1. Si ſecunda, tertia, aut quarta diviſoris nota toties contineri non poſſit in ſecunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejuſdem diviſoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus eſſe minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem nove-

na-

nario, etiamſi diviſor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum tot figuris conſtare, quot ſunt diviſionis membra.

*Sit aliud exemplum*. Dividere oporteat numerum datum *M* per numerum *N*.

```
N 1 7 8 )      M 7 3 3 9 4 4 7 5
                 7 1 6
                 -----
R 4 1 0 0 2 5 ) — 1 7 9
                  1 7 9
                  0 0 0 4 4 7
                        3 5 8
                        -----
                      — 8 9 5
                        8 9 5
                        -----
                        0 0 0
```

1. Secerne puncto ex dividendo *M* tres figuras 733, quot ſunt in diviſore *N*, erit primum diviſionis membrum 733.. Jam prima diviſoris nota continetur in prima dividendi nota ſepties, ſed cum ſecunda, & tertia diviſoris nota contineri non poſſint in ſecunda, & tertia nota dividendi pluries, quam quater, minuitur 7 tribus unitatibus, & ponitur in *R* quotus 4.

2. Duc diviſorem *N* in 4, & productum 716 ſubſcribe ipſi 733, a quo ſubtrahendum eſt, remanent 17. Adde ex dividendo ſubſequentem figuram 9, faciunt 179, eritque ſecundum diviſionis membrum, in quo patet, diviſorem contineri ſemel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando diviſorem, habetur productum 179, ſubducendum ex ipſo 179, adeoque remanet 0.

3. Diviſor contineri non poteſt in duabus ſubſequen-

quentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cifras, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus diviſor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera proſequere, ut ſupra. Erit quotus *R* 4100125 ſine ullo reſiduo.

Schol. I. *Quod remanet poſt ſingulas ſubtractiones, nunquam poteſt eſſe æquale, aut majus diviſore, alias fuit erratum. Aſſumptus enim fuit quotus juſto minor. Contra vero ſi productum ex quoto in diviſorem majus ſit reſiduo diviſionis, ex quo fieri debet ſubtractio, ita ut ſubtractio fieri non poſſit, ſignum eſt, quotum aſſumptum eſſe juſto majorem, ac proinde eſſe minuendum. Utrumque caſum tyrones diligenter advertant.*

Schol. II. *Si abſoluta diviſione, aliquid remanet, ut in primo exemplo contigit, reſiduum illud ponitur ſupra lineam, & ſub eodem ponitur diviſor, atque hinc oriuntur fractiones, de quibus in Capite* III.

Schol. III. *Qui ſunt in hac dividendi praxi peritiores, producta ex ſingulis quotis in diviſorem non ſubſcribunt, ſed illa memoria retinentes, ſtatim ſubtrahunt ex membro diviſionis, & notant reſiduum. Sit dividendus numerus* A *per* B, *quotus* 2 *ductus in diviſorem* 43, *nempe* 86, *non ſubſcribitur ipſi* 87, *ſed immediate mente ſubtrahitur, notaturque ſub eodem* 87 *reſiduum* 1. *Sic etiam invento diviſore* 3, *ductoque in* 3, *&* *in* 4 ( *diviſoris notas* ) *producta* 9, *&* 12 *non ſubſcribuntur ſub* 146, *ſed ſubtrahuntur ſtatim, ac notatur primo* 7, *deinde* 1, *hoc eſt reſiduum* 17, *ſub ipſo* 146. *Quod compendium valde juvat.*

B 4 3      A 8 7 4 6
              − 1 4 6
2 0 3             1 7

Schol. IV. *Si diviſor habeat in fine unam, vel plures cifras, ut* 120, 300, 4000 *&c. abſcinduntur ab illo cifræ, totidemque figuræ a dividendo dextrorſum; deinde fit, ut moris eſt, diviſio cum reliquis figuris: ſed abſoluta operatione, figuræ ex dividendo abſciſſæ ponuntur ſupra lineam, infra quam ponitur diviſor integre ſumptus cum cifris. Ut ſi dividendus ſit* 635 *per* 200. *Abſcinde duas cifras ex* 200, *& duas figuras dextrorſum ex dividendo* 635, *diviſo deinde* 6 *per* 2, *habetur quotus* $3\frac{35}{200}$. *Quod ſi prima diviſoris nota fuerit* 1, *& reliquæ omnes cifræ, ut* 10, 100, 1000 *&c. confecta erit diviſio, ſi ad dexteram dividendi abſcindas totidem figuras, quot ſunt in diviſore cyfræ, nam unitas non dividit. Proinde dividendo* 145690 *per* 10000, *quotus erit* $14\frac{5690}{10000}$; *dividendo per* 1000, *quotus erit* $145\frac{690}{1000}$ *&c.*

Schol. V. *Eſt alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant*, partire per ripiego; *qui tunc ſolum adhiberi poteſt, cum diviſor poteſt reſolvi in ſuos factores. Sit dividendus numerus* 15460 *per* 45, *quia diviſor* 45 *reſolvi poteſt in ſuos factores* 5 *&* 9, *ex quibus componitur, divido primo per* 5, *quotus eſt* 3092: *divido deinde quotum* 3092 *per* 9, *oritur quotus quæſitus* $343\frac{5}{9}$. *Similter dividendus ſit* 13463 *per* 36, *qui* 36 *componitur ex* 4 *&* 9, *divide per* 4 *numerum datum, quotus erit* $3365\frac{3}{4}$, *hunc divide per* 9, *quotus erit* $373\frac{8}{9}$. *Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio, duc reſiduum* 8 *in diviſorem* 4, *& producto adde reſiduum primum* 3, *fit* 35. *Duc deinde* 4 *in* 9 *fit* 36, *erit fractio* $\frac{35}{36}$, *unde*

373

373 $\frac{35}{36}$ *quotus quæſitus. Ratio bujus ſuo loco innoteſcet.*

*Examen diviſionis fit per multiplicationem.* Nam multiplicando diviſorem per quotum, reſtituitur numerus dividendus, modo illi addatur, ſi quid ex diviſione remanſit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex diviſore, tum ex quoto; reſidua 8 & 4 notantur in angulo crucis ſiniſtro *A* & *B*, & ducuntur inter ſe, deinde producti reſiduum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipſius crucis, cui quidem additur reſiduum diviſionis factæ, ablatiſque ex hac ſumma 9, vel 7, quod remanet, ut hic o, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet eſſe id quod reſtat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, & notatur in *E*. Patet ſequenti exemplo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 5 | 4 5 6 3 | | 5 | |
| ╱ | 1 0 6 | *A*8 — \| — o*C* | | o — \| — 6 |
| 1 3 0 | — 1 3 | *B*4 \| o*E* | | 4 \| 6 |

*Demonſtr.* Ex praxi a nobis tradita tot notis conſtare debet quotus, quot ſunt membra diviſionis, ut *in Coroll. n.* 3. dictum eſt. Sed ſingulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties ſingula diviſionis membra diviſorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum diviſionis 186 continet quater diviſorem 45, ſicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita ducitur 45 in 4, & productum 180 (diviſoris 45 quadruplum) ſubtrahitur ex membro diviſionis 186, ergo patet, diviſionis membrum 186 quater continere diviſorem, ſicuti quotus 4 totidem uni-

unitates continet, alias ſubtrahi non poſſet. Remanet quidem, facta ſubtractione, numerus ſenarius, ſed hic ſequenti figuræ 7 jungitur pro ſecundo diviſionis membro, ut dictum eſt. Pari ratione idem oſtenditur de ſingulis ipſius quoti notis; unde ſequitur, integrum quotum 4149 toties unitatem continere, quoties dividendum 186730 continet diviſorem 45, adeo ut quotus 4149 æque multiplex ſit unitatis, ac dividendum æque multiplex eſt diviſoris, & ſuperſint 25.

## PROPOSITIO VII.

*De diviſione integrorum per numeros diviſoris multiplices.*

Methodus dividendi numerum per numeros diviſoris multiplices adhiberi potiſſimum ſolet, cum numerus dividendus eſt valde prolixus.

*Sit exemplum*. Ex doctrina Tychonis Sol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italicorum 2140011712, quæritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60, erit diviſor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440, ſeu 144, (ablata ab ipſo cifra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorſum 2) qui ponatur ad dexteram dividendi, ut in *B*, & notetur punctum ſub tertia ipſius dividendi nota 4, cum diviſor *B* ſemel contineatur in 214, ut in *præc. Propoſ.* dictum eſt. Tum ſcribantur ſub ipſo diviſore *B* ſinguli multiplices 288, 432, 576 &c. cum notis appoſitis, 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia diviſor *B* continetur ſemel in 214, ſcribatur 1 in quoto *C*, ſubtractoque diviſore ipſo ex 214, remanent 70, additaque ſequenti figura dividendi,

C fiunt

fiunt 700 . Tunc obſervetur qualis ex multiplicibus ſub *B* exiſtentibus ſit proxime minor , quam 700 , patet illum eſſe 576 . Pone igitur in quoto notam illi appoſitam 4 , & ſubtrahe ipſum 576 ex reſiduo 700 , remanent 124, quibus addita figura ſequenti, habetur 1240 . Iterum obſerva , qualis multiplex ſit proxime minor ipſo 1240 ; reperitur 1152 , cui appoſita eſt nota 8 , hanc pone in quoto *C* , & illum ſubtrahe ex reſiduo 1240 , reſiduum eſt 88 , & ſic deinceps , donec exhauriantur omnes dividendi figuræ . Sic enim nullo fere labore invenitur quotus 148119 , cum reſiduo $\frac{352}{1440}$ , quod quartam fere milliarii partem importat , ut in *Cap. ſequ.* explicabitur . Sol igitur unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119.

```
     C                    A                     B
1 4 8.,...,)2 1 4 0 0 1 1 7 1 2        1 4 4 | 1
            1 4 4                      2 8 8 | 2
           -------                     4 3 2 | 3
          -- 7 0 0                     5 7 6 | 4
             5 7 6                     7 2 0 | 5
           -------                     8 6 4 | 6
             1 2 4 0                 1 0 0 8 | 7
             1 1 5 2                 1 1 5 2 | 8
            ---------                1 2 9 6 | 9
               -- 8 8.,...,                  |
```

Schol. I. *Eſt etiam faciliſſima diviſio per tabellas Neperianas , de quibus dictum eſt in Schol.* 4. *Propoſ.* v. *quæ ex hac Propoſ. ſequitur . Nam eſto dividendus numerus* A 142188 *per* B 578 . *Apponantur tres tabellæ , quæ in vertice referant diviſorem* 578 , *præfixa illis tabella numerorum exponentium* 1 , 2 , 3 , 4 , *&c.* ( *vid. tabellam* A B *fig.* 2. ) *Tum determinentur puncto in numero dividendo tot notæ , quot diviſibiles ſunt*

*per*

*per* 578, *nempe* 1421. *Patet exponentes* 1, 2, 3, 4, *indicare ſummas multiplices, hoc eſt duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius diviſoris* 578; *quod ex ipſa conſtructione tabellarum, & ex Schol. præcit. facile intelligitur. Collectis enim in unam ſummam numeris ex triangulis, & rhombis directe ad exponentem ex. gr.* 2 *appoſitis, habetur duplum ipſius* 578, *nempe* 1156, *& ſic de aliis. Obſerva igitur qualis numerus ſit æqualis, vel proxime minor dividendi membro* 1421, *occurrit ſtatim in ſecundo ordine ſumma* 1156, *proinde ejuſdem ordinis exponens, nempe* 2, *eſt quotus quæſitus, qui ponatur in* C, *ſubtractiſque* 1156 *ex dividendo* 1421, *remanent* 265. *Pro ſecundo diviſionis membro adde ſequentem notam* 8, *fiunt* 2658, *& eodem modo operare: hoc eſt obſerva in tabellis, qualis ſit numerus proxime minor* 2658, *invenies in quarto ordine ſummam* 2312, *quæ indicat quotientem* 4 *ponendum in* C, *ſubtractiſque* 2312 *ex* 2658, *reſiduum eſt* 346. *Addita demum ultima figura* 8, *fiunt* 3468, *quæ in tabellis quæſita, dant quotum* 6 *ſine ullo reſiduo. Eſt ergo quotus* 246. *Quod totum tum ex tabella præcitata* A B, *tum ex ſequenti ſchemate ſatis patet.*

```
C 2 4 6      A 1 4 2 1 8 8      B 5 7 8
               1 1 5 6
             -----------
               - 2 6 5 8
                 2 3 1 2
             -----------
                 - 3 4 6 8
                   3 4 6 8
             -----------
                   0 0 0 0
```

Schol. II. *Si membrum dividendum minus ſit ipſo diviſore, additur quoto cifra, & alia figura membro*

*dividendo adjicitur , ut in Prop. VI. dictum eſt . Ceterum ſi quis in hac dividendi praxi ſit aliquanto exercitatus, diviſiones etiam prolixas citiſſime expediet, eritque minus obnoxius erroribus ; qui inter dividendum ex incuria, vel hallucinatione naſcuntur .*

## CAPUT II.

### *De Calculo Denominatorum .*

Regulæ vulgaris Arithmeticæ hactenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis* , hoc eſt numeris diverſarum ſpecierum . Quod quidem difficile non erit, ſi dignoſcatur valor unius ſpeciei reſpectu alterius ; nimirum quot partes minoris ſpeciei majorem ſpeciem conſtituant . Sic ut addantur , vel ſubtrahantur dies, horæ, ac minuta, neceſſe eſt ſcire minuta temporis 60. unam horam , horas autem 24 diem unum efficere . Idem de monetis , ponderibus , ac menſuris valet : quæ licet pro diverſitate Provinciarum , imo & Urbium variæ ſint , modus tamen eas calculandi eſt ubique proportionaliter idem; adeo ut ſi quis unius loci monetas, pondera ac menſuras addere , ſubtrahere , multiplicare , ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum eaſdem regulas applicare facile poterit.

## PROPOSITIO I.

### *De Additione numerorum denominatorum.*

I. *Exemplum ſit* de vulgari moneta Romana , quam componunt ſcuta, aſſes, & quadrantes; hoc eſt quadrantes 5 aſſem 1, & aſſes 100 ſcutum 1, quod decem

cem denariis argenteis, ſeu juliis conſtat.

Diſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus; at primo quidem loco dextrorſum ſpecies minimæ, tum ordine majores uſque ad maximam; ut in hoc exemplo collocentur primo quadrantes, ſecundo aſſes; tertio ſcuta; & ſi qua ſpecies intermedia deſit, vacuus ejus locus repleatur cifra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur aſſis 1, remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Adde deinde aſſem 1 ad ſequentem ſeriem aſſium, nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 aſſes. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad aſſium decades 1, 2, 9, 3, ſunt decades 16, hoc eſt aſſes 160; reſerva itaque decades 10, ( centenarium nempe 1 ) pro ſequenti ſpecie, & ſcribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena ſcutorum eo modo, quo factum eſt *in Propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei, prodibit ſumma ſcutorum 5099, aſſes 69, quadr. 3.

| | *Scut.* | *Aſſ.* | *Quad.* |
|---|---|---|---|
| | 2 3 0. | 3 5. | 0. |
| | 5 7 2. | 9 8. | 3. |
| | 7 8 4. | 2 0. | 4. |
| | 3 5 1 2. | 1 5. | 1. |
| Summa | 5 0 9 9. | 6 9. | 3. |

II. Libra in Urbe conſtat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ ſint ergo

| | *Lib.* | *Unc.* | *Den.* |
|---|---|---|---|
| | 3 8. | 1 0. | 2 3. |
| | 7 0. | 1 1. | 1 6. |
| | 3 5 2. | 0 5. | 2 2. |
| Summa | 4 6 2. | 0 4. | 1 3. |

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc eſt unciæ 2, quæ ſequenti columnæ addendæ ſunt, & remanent denarii 13, quos ſcribe infra lineam. Similiter unciæ 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, ſequenti columnæ addendas, & remanent unciæ 4, quæ pariter ſcribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *Propoſ.* 2. *Cap.* 1., & habentur libræ 462, unc. 4, den. 13.

III. Addendi ſunt pedes Pariſienſes, pollices, & lineæ. Pes autem Pariſienſis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo

| | *Pedes* | *Poll.* | *Lin.* |
|---|---|---|---|
| | 128. | 10. | 9. |
| | 320. | 11. | 2. |
| | 572. | 08. | 7. |
| Summa | 1022. | 06. | 6. |

Quod quidem manifeſtum eſt: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc eſt pollicem 1, qui reſervatur ſequenti columnæ addendus, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti faciunt 30, qui bis continent 12, hoc eſt pedes 2 ſequenti columnæ addendos, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam ſequentem, continuatur additio, ut in *Propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei.

*Examen* fieri poteſt ſic: completa ſuperioris exempli additione, duo lineam ſub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter ſolum ordinem *A*, qui relinqui-

quitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A*, habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen uſurpari quoque poteſt pro numeris homogeneis, ut patet.

| | *Ped.* | *Poll.* | *Lin.* |
|---|---|---|---|
| *A* | 128. | 10. | 9. |
| | 320. | 11. | 2. |
| | 572. | 08. | 7. |
| *B* | 1022. | 06. | 6. |
| *C* | 893. | 07. | 9. |
| *D* | 1022. | 06. | 6. |

## PROPOSITIO II.

### *De ſubtractione numerorum denominatorum.*

Diſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus, ut in *præc. Propoſ.* dictum eſt, & numerus minor, ſeu ſubtrahendus, collocetur ſub majori, a quo debet ſubtrahi.

Quoties inferior numerus a ſuperiori ſubduci nequit, utpote illo major, toties numero ſuperiori addatur unum integrum ſequentis ſpeciei, ut fiat major ſubtrahendo. Deinde numerus ſpeciei, ex qua ſum-

ptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* ſubtrahenda ſit pecunia expenſa *B*. Quia quadrantes 4 ſubtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, ſumo 1 ex aſſibus 28, hoc eſt quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus ſubductis 4, remanent 4 infra lineam ſcribendi. Deinde minuendo unitate aſſes 28, vel augendo unitate (idem enim eſt) aſſes 36, ita ut prima figura 6 fiat 7, ſubducitur 7 a ſuperiori numero 8, & ſcribitur infra lineam reſiduum 1. Rurſus quia 3 ſubtrahi nequit ex 2, ſumo 1 ex ſcutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo ſubtractis 3, reſiduum, quod ſcribitur infra lineam, eſt 9. Minuitur deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur ſubtractio, ut in *Prop.* 4. *Cap.* 1., & habetur reſiduum *C* ſcut. 140, aſs. 91, quadr. 4.

| | *Scut.* | *Aſſ.* | *Quadr.* |
|---|---|---|---|
| *A* | 198. | 28. | 3. |
| *B* | 57. | 36. | 4. |
| *C* | 140. | 91. | 4. |

II. Subtrahendus ſit numerus *N* ex numero *M*, ſcilicet

| | *Dies.* | *Horæ.* | *Min.* |
|---|---|---|---|
| *M* | 21. | 14. | 53. |
| *N* | 10. | 13. | 57. |
| *Q* | 11. | 00. | 56. |
| | 21. | 14. | 53. |

Cum

Cum minuta 57 ſubtrahi nequeant ex minutis 53, deſumitur unum integrum ex ſequenti ſpecie, nempe hora 1, ſeu minuta 60, quæ addita minutis 53 faciunt min. 113, ex quibus ſubtractis 57, ſcribitur infra lineam reſiduum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta ſubtractione, nullum eſt reſiduum, & ſcribitur 0. Demum ſubductis 10 ex 21 reſiduum eſt 11, eſt ergo numerus quæſitus *Q* dies 11 min. 56.

*Examen* fit addendo reſiduum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *Propoſ. præc.* dictum eſt, reſtituitur major numerus *M*, ſi erratum non fuerit.

## PROPOSITIO III.

*De multiplicatione numerorum denominatorum.*

Primo reducantur omnes ſpecies ad minimam, ut ſi multiplicandæ ſint libræ, ſolidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde ſpecies reductæ multiplicentur, ut moris eſt, per *Propoſ.* 5. *Cap.* 1. Productum vero reducitur ad majorem ſpeciem per diviſionem.

I. *Sit exemplum.* Plancus expendit ſingulis diebus libras 5, ſolidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, ſeu diebus 365 expendet. Cum denarii 12 ſolidum unum, ſolidi vero 20 libram conſtituant, duc libras 5 in 20, & producto adde 15, habebis ſolidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388; qui multiplicandi ſunt per dies 365, fitque per *Propoſ.* 5. *Cap.* 1. productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis Solidos 42218, & denarios 4; Utque ſolidi ad libras reducantur, divide illos per 20, erunt libræ 2110 & ſolidi 18. Itaque Plancus uno an-

anno expendet lib. 2110, ſol. 18, den. 4. En totius reductionis typus.

| | |
|---|---|
| | 20 |
| *Lib.* | 5 |
| | 100 |
| *adde* | 15 |
| *Sol.* | 115 |
| | 12 |
| | 230 |
| | 115 |
| | 1380 |
| *adde* | 8 |
| *Den.* | 1388 |

II. *Sit exemplum*. Cum Sol motu proprio conficiat ſingulis diebus minuta 59, & ſecunda 8, quæritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad ſecunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum, fient ſecunda 3548, quæ multiplicari debent per dies 30. Erit per *Propoſ.* 5. *Cap.* 1. productum 106440 ſecundorum. Hæc divide per 60, quotus dat minuta 1774, quæ quidem ſi iterum dividas per 60, habebis gradus 29, & min. 34, quos Sol motu proprio percurrit in Ecliptica diebus 30.

*Examen multiplicationis fit per diviſionem*, de qua *in ſequenti Propoſ.*

PRO-

## PROPOSITIO IV.

*De diviſione numerorum denominatorum.*

Tam diviſoris, quam dividendi ſpecies reducantur ad minimam, ut factum eſt in *præc. Propoſ.* Tum fiat diviſio *per Propoſ. 6. Cap.* 1.

I. Emit quis ſerici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque ſcuta Romana 292, aſſes 10, quæritur quanti ſteterit ulna. Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; & adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant unciæ, additiſque unciis 10, erunt unciæ 5842. Reducantur pariter ſcuta ad aſſes, & addantur aſſes 10, fient aſſes 29210. Itaque dividantur per *Propoſ. 6. Cap.* 1. aſſes 29210 per 5842, quotus eſt 5: hoc eſt uncia quælibet valet aſſibus 5, proinde unciæ 12, ſeu palmus, valet aſſibus 60, adeoque palmi 8, ſive ulna, valet aſſibus 480, hoc eſt ſcut. 4, aſſibus 80.

II. Fingamus lunam diſtare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, ſec. 25, quæritur quanto tempore ſtellam illam luna aſſequetur. Ex Tab. Alfonſinis luna motu ſuo diurno conficit gr. 13, min. 10, ſec. 35. Proinde dividendi ſunt gradus 45, min. 30, ſec. 25 per gradus 13, min. 10, ſec. 35, ut habeatur appulſus lunæ ad fixam.

Primo duc gr. 45. in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rurſus in 60, & adde producto 25, habebis ſec. 163825, numerus ſcilicet dividendus. Eodem pacto invenietur diviſor, nempe min. ſec. 47435. Tum facta diviſione per *Propoſ. 6. Cap.* 1. habetur quotus 3, hoc eſt dies 3, & remanent $\frac{21520}{47435}$ partes ſcilicet unius diei, ex qua fractione eruuntur horæ 10, min. 53 circiter, modo explicando in *Propoſ.* 4. *Cap.* 3. Luna igitur ad ſtel-

ſtellam perveniet diebus 3, horis 10, min. 53.

*Examen diviſionis fit per multiplicationem.*

Nam ſi in exemplo primo multiplicaveris per *Propoſ. prac.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per ſcut. 4, aſſ. 80, hoc eſt uncias 5842 per aſſes 480, fiet productum 2804160, quod diviſum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto ſcut. 292. 10. Similiter in ſecundo exemplo ducto diviſore 47435 in quotum 3, additoque ad productum reſiduo 21520, reſtituitur numerus, qui fuit diviſus 163825.

## CAPUT III.

### *De Calculo Fractorum.*

### DEFINITIONES.

Numerus *fractus*, qui & *fractio*, vel *minutia* dicitur, eſt pars, ſeu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes diviſi. Ut ſi totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quiſpiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, ſcilicet $\frac{2}{3}$, quæ fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui ſcribitur ſupra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviſo habentur: alter qui ſcribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, ſeu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit diviſum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet,

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{20}$ &c.

Quæ fractiones ſic pronunciantur, *una dimidia*, *una*

*una tertia*, *duæ ſeptimæ*, *quatuor nonæ*, *undecim vigeſimæ &c.* intelligitur pars, ſeu partes.

Si numerator æqualis ſit denominatori, minutia æqualis eſt uni integro. Sic $\frac{3}{3}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviſo. Adſunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ ſunt 1. Item $\frac{5}{5}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{8}{8}$ &c. ſignificant 1. Hinc patet, unitatem eſſe illud totum diviſum in partes tertias, quintas, ſextas &c.

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus ſunt quam unum integrum in tres partes diviſum, ſed important 1, & inſuper $\frac{1}{3}$. Similiter $\frac{16}{5}$ ſignificant tria integra, & adhuc $\frac{1}{5}$.

II. *Minutia minutiæ* eſt pars alterius minutiæ, ut ſi fractionis $\frac{3}{4}$ ſumatur dimidia pars, nempe $\frac{1}{2}$, erit hæc minutia minutiæ, quæ a majori diſtingui ſolet per interpoſitam lineam. Sic $\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}$ ſignificat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in poſterum ſignis, quæ ſequuntur.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ ſignificat duas quantitates $a$ & $b$ eſſe æquales.

$+$ *Plus*. *Signum additionis*. Ut $a + b$ ſignificat ſummam duarum quantitatum $a$, & $b$. Sic $3 + 5$ ſignificat ſummam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

$-$ *Minus*. *Signum ſubtractionis*. Ut $a - b$ ſignificat $a$ minus $b$; hoc eſt a quantitate $a$ ſubtractam eſſe quantitatem $b$. Sic $5 - 3 = 2$.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ ſignificat $a$ multiplicatum in $b$, vel per $b$. Ut $3 \times 5 = 15$.

$::$ *Signum proportionum æqualium*. Sic $a . b :: c . d$ denotat eandem eſſe proportionem inter $a$ & $b$, quæ eſt inter $c$ & $d$. Ut $2. 4 :: 3. 6$. Item $1. 3 :: 9. 27$. &c.

$\div$ *Signum proportionis continuæ*. Sic $\div a, b, c,$ denotat $a$ eſſe ad $b$, ſicuti $b$ ad $c$. Ut 2, 4, 8.

*AXIO-*

## AXIOMATA.

I. Unitas ſe habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic $1 . \frac{2}{3} :: 3 . 2$. Unitas enim ex dictis eſt totum diviſum, quod ſe habet, ad partem, (quæ eſt fractio) ut fractionis denominator (qui eſt totum, quod fuit diviſum) ad ſui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad ſuos numeratores eandem rationem, ſunt inter ſe æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. ſunt fractiones æquales, idemque ſignificant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per ſe patet. Nam ſingulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractorum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimitur, ſed æſtimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad ſuum denominatorem; proinde major eſt $\frac{1}{2}$, quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutant. Sic multiplicando $\frac{2}{3}$ per 5 oritur $\frac{10}{15}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{15}$ per 5, fit $\frac{2}{3}$ ejuſdem valoris cum $\frac{10}{15}$. Item diviſis $\frac{3}{9}$ per 3, fit $\frac{1}{3}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. *Multum intereſt, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, prius quam ad fractorum regulas addiſcendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obſcura erunt, quæ ſequuntur.*

PRO-

## PROPOSITIO I.

*Datis duobus numeris, maximam eorum communem menſuram invenire.*

Menſura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & ſine reſiduo dividit; ſeu numerus, qui aliquoties ſumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur menſura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum ſepties ſumptus adæquat, Dicitur autem menſura maxima numerus, per quem ſolum duo numeri reducuntur ad numeros primos, ſeu minimos.

I. Dati ſint duo numeri *A* & *B*, quorum menſura communis maxima quæritur. Dividatur major *A* per minorem *B*, & neglecto quoto, notetur reſiduum *C*: deinde *B* dividatur per reſiduum *C*, tum reſiduum *C* per reſiduum *D*, & ſic deinceps nulla habita exponentium ratione, donec tandem diviſor occurrat *F*, qui præcedentem exacte dividat ſine ullo reſiduo; hic erit maxima communis menſura quæſita.

| *Exempl.* 1. | | *Exempl.* 2. |
|---|---|---|
| *A* | 234 | 438 |
| *B* | 144 | 102 |
| *C* | 90 | 30 |
| *D* | 54 | 12 |
| *E* | 36 | 6 |
| *F* | 18 | 0 |
| | 0 | |

II. Quod ſi poſt omnem diviſionem remanet 1, ſignum eſt, nullam reperiri poſſe communem menſuram inter numeros datos, eoſque eſſe inter ſe primos.

Da-

Dati ſint numeri $M$ & $N$, divide majorem $M$ per $N$, & neglecto quoto, nota reſiduum $R$, ac ſic deinceps proſequere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati $M$ & $N$ ſunt inter ſe primi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Exempl.* 1. | $M$ | 134 | *Exempl.* 2. 269 |
| | $N$ | 49 | 147 |
| | $R$ | 36 | 122 |
| | $S$ | 13 | 25 |
| | | 10 | 22 |
| | | 3 | 3 |
| | | 1 | 1 |

*Demonſtr.* per ſe manifeſta eſt. Nam per continuam illam numeri minoris a majori ſubtractionem (diviſio enim eſt compendioſa ſubtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo caſu pars illa aliquota erit maxima communis menſura duorum numerorum; in ſecundo caſu evidens eſt, nullum alium numerum, præter unitatem, metiri poſſe numeros datos, adeoque ſunt inter ſe primi (*per Defin.* 8.)

Schol. *Nota, quemlibet numerum ſe ipſum ſemel metiri; proinde dari poteſt menſura communis maxima inter duos numeros, quorum alter ſimplex ſit, ſeu primus, & alter compoſitus. Sic* 7 *eſt maxima communis menſura inter* 7 & 21. *Nam utroque diviſo per* 7, *habetur* 1 & 3. *Item* 5 & 75 *diviſi per* 5, *faciunt* 1 & 15, *adeoque* 5 *eſt maxima communis menſura; & ſic de aliis.*

## PROPOSITIO II.

*Fractiones ad minimos terminos reducere.*

Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia

alia illi æqualis, nempe valoris ejuſdem, minimis tamen terminis expreſſa reperitur.

I. Data ſit fraƈtio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis menſura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propoſ. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejuſdem valoris, & minimis terminis expreſſa $\frac{20}{37}$ per *Axiom.* 3.

II. Sit minutia data $\frac{60}{96}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis menſura inter 96, & 60, per *Propoſ. præc.* erit 12, per quem diviſo utroque datæ fraƈtionis termino, habetur nova fraƈtio $\frac{5}{8}$ minimis terminis expreſſa. Hæc praxis vulgo dicitur *ſchiſare i rotti*.

*Demonſtratio* patet ex 3. *Axiom.*

## PROPOSITIO III.

*Fraƈtiones ad idem nomen reducere.*

Fraƈtiones reducere ad idem nomen, eſt efficere, ut fraƈtiones diverſorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, ſed idem valeant, quod prius.

I. Sint duæ fraƈtiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter ſe ad invicem denominatores 5 $\times$ 4, & 4 $\times$ 5, erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, ſeu decuſſatim, numeratorem unius minutiæ per denominatorem alterius, hoc eſt 2 $\times$ 4, & 3 $\times$ 5, erunt novi numeratores 8 & 15, qui direƈte collocandi ſunt ſub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in ſequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ fraƈtiones *C* & *D* ejuſdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejuſdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis $A$ multiplicantur per eundem numerum, hoc eſt per 4 denominatorem fractionis $B$, unde oritur fractio C priori æqualis per *Axiom. cit.* Similiter termini fractionis $B$ multiplicantur per 5 denominatorem fractionis $A$, & oritur fractio $D$ priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones C & $D$ idem valent ac duæ priores.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\frac{2}{5}$ | $\times$ | $\frac{3}{4}$ | $B$ | $\frac{2}{6}$ | $\times$ | $\frac{10}{15}$ |
| C | $\frac{8}{20}$ | | $\frac{15}{20}$ | $D$ | $\frac{15}{90}$ | | $\frac{60}{90}$ |

II. Quod ſi reducendæ ſint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut $A$, $B$, C &c. duc omnes denominatores inter ſe $3 \times 4 \times 5$ fiet $F$ communis denominator 60, qui diviſibilis eſt per ſingulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis $A$, quotus eſt 20, tertia ſcilicet denominatoris pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipſius 60, adeoque $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ per *Axiom.* 2.

Similiter diviſo 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis $B$, habetur 15 quarta pars ipſius 60. Duc 15 in 3 habebis 45, tres quartas partes ejuſdem 60, adeoque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Proinde fractiones datæ $A$, $B$, C æquales ſunt fractionibus $M$, $N$, $R$; quod per ſe manifeſtum eſt.

$$\overset{A}{\tfrac{2}{3}} \times \overset{B}{\tfrac{3}{4}} \times \overset{C}{\tfrac{1}{5}} = 60\,F$$

$$\overset{M}{\tfrac{40}{60}} \quad \overset{N}{\tfrac{45}{60}} \quad \overset{R}{\tfrac{12}{60}}$$

Co-

Coroll. Ex hac Propoſ. innoteſcit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum ſit major. Nam ſi reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ ſit major. Sic in ſuperiori exemplo fractio $B$ eſt ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis $N$.

Schol. *Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit diviſor. Sint reducendæ ad idem nomen fractiones* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{7}{15}$, *quia* 3 *dividit exacte* 15, *multiplica per quotum* 5 *terminos fractionis* $\frac{2}{3}$, *oritur* $\frac{10}{15}$ *ejuſdem nominis cum alia fractione. Quod eſt valde commodum in calculis Algebraicis, ut in noſtris* Inſtit. Analyt. *annotavimus*.

## PROPOSITIO IV.

*Fractionem ad aliam dati nominis & ejuſdem valoris revocare.*

I. Data ſit fractio $\frac{2}{3}$, quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus ſit 60. Duc numeratorem $2 \times 60$, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiæ quæſitæ $\frac{40}{60}$, quæ quidem eſt ejuſdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3, 2 : : 40. ut patet.

Data ſit fractio $\frac{21520}{47435}$, quæ ſignificet unius diei partes, ut in *Propoſ.* 4. *Cap.* 2. reducenda ad horas. Duc $21520 \times 24$, & productum divide per denominatorem 47435, quotus dat horas 10. & remanet $\frac{42130}{47435}$ partes unius horæ. Quæ ut ad minuta reducantur, duc $42130 \times 60$; & productum divide per eumdem denominatorem, quotus dabit minuta

nuta prima 53, & remanent $\frac{13745}{47435}$ partes unius minuti primi. Ut invenias ſecunda, duc 13745 $\times$ 60, & dividendo per 47435, quotus dabit min. ſecunda 17. Luna igitur ad ſtellam pervenit diebus 3. hor. 10. min. 53. ſec. 17.

II. Quod ſi datæ fractionis denominator non exacte dividit productum, ut ſi $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator eſt 8, productum 16, quod oritur ex $2 \times 8$, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 ſupra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex reſiduo, nempe $\frac{1}{3}$, quæ erit fractionis fractio, & facit hunc ſenſum, duæ tertiæ in octavas redactæ dant quinque octavas, & unam tertiam unius octavæ, ſcilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} | \frac{1}{8}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{3} | \frac{1}{8}$ patet. Nam $\frac{2}{3} | \frac{1}{8}$ = per Prop. 7. *hujus*; proinde $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{24} =$ (*per Ax.* 3.) $\frac{15}{24} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ per *Prop.* 2. *hujus*.

Schol. *Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut ſi ſcire velis quid valeant $\frac{3}{5}$ unius ſcuti Romani in juliis, vel aſſibus. Quia* 10 *julii, aut aſſes* 100 *efficiunt ſcutum Romanum* 1, *duc numeratorem* 3 *in* 10, *aut in* 100, *& productum divide per denominatorem* 5, *erunt in primo caſu* $\frac{6}{10}$, *in ſecundo* $\frac{60}{100}$, *hoc eſt julii ſex, aut aſſes* 60. *Item dantur* $\frac{3}{7}$ *unius pedis, ſcire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia* 12 *pedem* 1 *efficiunt, duco* $3 \times 12$, *& productum* 36 *divido per* 7, *quotus dat* 5, *unde habentur* $\frac{5}{12}$ *hoc eſt pollices* 5, *& remanet* $\frac{1}{7}$. *Quod ſi iterum ſupponas pollicem dividi in* 12 *lineas, facile erit explorare, quid importet una ſeptima pars unius pollicis. Hæc praxis vulgo dicitur* valutare i Rotti.

PRO-

## PROPOSITIO V.

*Fractiones ad integra revocare.*

I. Cum numerator denominatore ſuo major eſt, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ diviſæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ diviſæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod ſi denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex reſiduo minutia. Proinde $\frac{17}{3}$ diviſæ per 3 dant integra $5\frac{2}{3}$. Similiter $\frac{22}{7}$ diviſæ per 7 dant $3\frac{1}{7}$.

Schol. *Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac menſuras in alias ſpeciei altioris. Sic aſſes* 350 *ſi dividantur per* 100, *reducuntur ad ſcuta Romana* $3\frac{50}{100}$, *ſeu* $3\frac{1}{2}$. *Pariter minuta* 120 *diviſa per* 60, *dant horas* 2. *Patet diviſores iſtos* 100, & 60 *eſſe denominatores minutiarum, per quos eorum numeratores dividuntur per hanc Propoſitionem.*

## PROPOSITIO VI.

*Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.*

Si datus integer v. gr. 3. reducendus in fractum, cujus denominator ſit 7. Multiplica integrum ipſum 3 per denominatorem datum 7, & producto ſubſcribe ipſum denominatorem 7, erit fractio quæſita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda ſit in fractum, cujus denominator ſit 5, erit $\frac{5}{5} = 1$ ex dictis *Definit.* 1. *Cap. hujus.*

Schol. I. *Si integro cuilibet ſupponatur unitas, fit fractio; vel quaſi fractio integro æquivalens; ut* $\frac{6}{1} =$

 6,

6, $\frac{8}{1}$ = 8 *&c. quod pro multiplicatione, & diviſione fractorum annotetur.*

Schol. II. *Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac menſuras in alias inferioris ſpeciei. Sint ſcuta Romana* 55 *reducenda ad aſſes, multiplica* 55 × 100, *habebis aſſes* 5500. *Item milliaria Romana* 50 *convertenda ſint in paſſus, quia paſſus* 1000 *milliare* 1 *efficiunt, duc* 50 × 1000, *fient paſſus* 50000. *Patet in his exemplis numeros illos* 100, *&* 1000 *eſſe denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri* 55, *&* 50, *ut fiant fractiones* $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ *juxta hanc* Propoſ.

## PROPOSITIO VII.

*Fractionem fractionis ad ſimplicem fractionem reducere.*

Duæ, vel plures fractiones fractionum ad unam ſimplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica ſingulos numeratores inter ſe, & ſingulos pariter denominatores inter ſe, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiæ $\frac{1}{4}$ ) $\frac{2}{3}$ ) hoc eſt una quarta pars duarum tertiarum ad ſimplicem minutiam reducenda; duc inter ſe numeratores 1 × 2, & denominatores 4 × 3, erit nova quæſita minutia $\frac{2}{12}$ = $\frac{1}{6}$. Similiter reducendæ ſint ad ſimplicem minutiæ minutiarum $\frac{3}{4}$ ) $\frac{2}{3}$ ) $\frac{3}{5}$, multiplicatis inter ſe 3 × 2 × 3; item 4 × 3 × 5, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60}$ = $\frac{3}{10}$ per *Prop.* 2. *hujus.*

*Demonſtr.* ſenſibili aliquo exemplo res manifeſta erit. Ponamus hanc ipſam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$ ) $\frac{2}{3}$ ) $\frac{3}{5}$ deſumptam fuiſſe ex uno ſcuto Romano, quod decem Juliis conſtat; dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius ſcuti nempe tres julios.

lios. Nam $\frac{3}{5}$ unius ſcuti continent ſex julios, cum julii duo ſint $\frac{1}{5}$ unius ſcuti. At $\frac{2}{3}$ ſex juliorum ſunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{4}$ quatuor juliorum ſunt tres julii. Ergo evidens eſt, minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$ nempe tres julios.

Id facile illuſtrari poteſt dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam ſi quæratur dimidium unius tertiæ partis ejuſdem lineæ, patet illam eſſe partem ſextam totius. Diviſis enim bifariam ſingulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea diviſa in ſex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *inſilzare i Rotti*.

## PROPOSITIO VIII.

### *Fractiones addere.*

I. Si fractiones addendæ ſint ejuſdem nominis adde ſimul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem ſubſcribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ additis numeratoribus $1 \times 2 \times 5 \times 6 = 14$, fit fractionum ſumma $\frac{14}{7} = 2$ per *Prop.* 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ ſint diverſi nominis, reduc ad idem nomen per *Prop.* 3. & operare, ut dictum eſt.

III. Quod ſi addendi ſunt integri cum fractis, adde ſeorſim integros, & ſeorſim fractos; ut ſi ad 4 $\frac{1}{5}$ addendi ſint 3 $\frac{1}{5}$, fiet ſumma 7 $\frac{2}{5}$. Res per ſe patet.

## PROPOSITIO IX.

*Fractiones ſubtrahere.*

I. Si minutiæ ſunt ejuſdem nominis, minor earum ex majori ſubducitur, & reſiduo ſubſcribitur communis denominator. Sic $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Item $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.

II. Si diverſi ſint nominis, reducanur ad idem nomen per *Prop.* 3., & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris ſubtrahenda ſit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejuſdem nominis cum data fractione per *Propoſ.* 6., & cetera fiant, ut ſupra. Subtrahere oporteat $\frac{2}{3}$ ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ per *Propoſ.* 5. Similiter ſubtrahenda ſint $2\frac{1}{4}$ ex $5\frac{1}{2}$, hoc eſt $\frac{9}{4}$ ex $\frac{11}{2}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propoſ.* 3. erunt $\frac{22}{4}$, & $\frac{9}{4}$, adeoque $\frac{22}{4} - \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$, per *Propoſ.* 6.

Schol. *Ut minutiæ addi, vel ſubtrahi poſſint, ſemper idem nomen habere debent, quod notetur.*

## PROPOSITIO X.

*Fractiones multiplicare.*

I. Si multiplicanda eſt fractio per fractionem, duc inter ſe numeratores, itemque denominatores inter ſe, res erit confecta. Multiplicanda ſit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ductis $2 \times 2$, & $3 \times 5$, habetur productum quæſitum $\frac{4}{15}$. Sic $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ per *Propoſ.* 2.

II. Quod ſi multiplicandus ſit integer per fractum, vel fractus per integrum, ſemper integro ſuppone unitatem, ut fiat quaſi fractio; deinde operare ut ſupra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, ſuppoſita integro uni-

unitate, erit $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium ſit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejuſdem fracti; ut ſi multiplicari oportet $2\frac{1}{5}$ per 6, fiat $\frac{11}{5} \times \frac{6}{1}$; erit productum $\frac{66}{5}$. Similiter ſi uterque multiplicator ſit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejuſdem nominis cum minutia ſibi adhærente: ut ſint multiplicanda $3\frac{1}{7} \times 5\frac{1}{3}$, reducantur ad fractos, erunt $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21} = 16\frac{16}{21}$ *per Propoſ.* 5.

*Demonſtr.* Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* eſt producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam ſicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* eſt productum fracti *A* multiplicati per fractum *B*.

$$A\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\ B \qquad \frac{3}{10}\ C$$

Coroll. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* ſit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas ſit ad *A* ut *B* ad *C* ex *Defin.* multiplicationis per *Prop.* 5. *Cap.* 1.; & unitas major ſit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

Schol. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per diviſionem, dividendo ſcilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiæ (modo diviſibiles ſint ſine reſiduo); Sint enim multiplicanda* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, *divide* 9 *per* 3, *&* 10 *per* 2, *fit* $\frac{3}{5}$ *productum quæſitum. Idem enim producitur, ac ſi more conſueto multiplicentur. Nam* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ per *Prop.* 2.

Schol.

Schol. II. *Si integrum cum minutia ducendum ſit in integrum, quod exacte diviſibile ſit per denominatorem minutiæ, ut ſi ducendum ſit* $38\frac{2}{3} \times 18$, *practici primo reſolvunt integrum in fractum, fitque* 116, *deinde diviſo* 18 *per denominatorem* 3, *habetur quotus* 6, *per quem multiplicant ipſum* 116, *& habetur productum quæſitum* 696. *Ratio per ſe patet.*

Schol. III. *Si vero integrum ducendum ſit in minutiam, ut* $32000 \times \frac{6}{5}$, *practici prius dividunt* 32000 *per* 5, *deinde quotum* 6400 *ducunt in* 6.

## PROPOSITIO XI.

### *Fractiones dividere.*

I. Si termini diviſoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut ſi dividenda ſit minutia $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, diviſis 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit $\frac{2}{3}$. Similiter ſi denominator ſit communis, ſatis erit dividere numeratorem per numeratorem, deleto denominatore; ſic dividendo $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$, quotus erit 3; & dividendo $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{8}$, quotus erit $2\frac{1}{3}$. Item dividendo $\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{6}$, deleto communi denominatore, quotus erit $\frac{5}{2}$.

II. Quod ſi termini diviſoris non exacte dividant terminos dividendi, aut denominator non ſit communis, tunc inverte diviſorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter ſe, quam denominatores inter ſe, productum erit quotus quæſitus. Dividenda ſit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, inverſo diviſore, erit $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ quotus quæſitus. Ita ſi dividere oporteat $\frac{5}{8}$ per $\frac{1}{4}$, hoc eſt, ſi dicatur, $\frac{1}{4}$ unius ſcuti Romani dat $\frac{5}{8}$ unius ulnæ, quot ulnas dabit ſcutum unum: diviſis (inverſo diviſore) $\frac{5}{8}$ per

per $\frac{1}{4}$, quotus dat ulnas 2 $\frac{1}{2}$. Nam $\frac{4}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8}$ $= 2 \frac{1}{2}$ per *Prop.* 5. *hujus*.

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, ſatis eſt multiplicare denominatorem fracti per ipſum integrum. Sit dividendus $\frac{1}{5}$ per 2, duc $5 \times 2$, quotus erit $\frac{1}{10}$. Item $\frac{1}{3}$ diviſus per 5, dat quotum $\frac{1}{15}$. Nam ſemper integro ſupponitur unitas.

IV. Cum diviſor, aut dividendus, vel uterque eſt integer cum minutia, reducendus eſt integer ad minutiam ſibi adjunctam, ut fiat unica minutia, & operatio inſtituenda eſt, ut ſupra. Sint dividenda 24 $\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{3}$, fient $\frac{121}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{363}{10} = 36 \frac{3}{10}$ per *Propoſ.* 5. Similiter ſint dividenda 15 $\frac{1}{3}$ per 12 $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{2}{25} = \frac{92}{75} = 1 \frac{17}{75}$.

*Demonſtr.* Dividere fractum *A* per fractum *B* eſt invenire quotum *C*, ad quem ita ſit unitas, ſicuti diviſor *B* ad dividendum *A* ex diviſionis definitione ad *Prop.* 6. *Cap.* 1. Sed unitas eſt ad fractum *C*, ut diviſor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim eſt ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem *B* eſt ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop* 3. oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem ſe habent ut 3 ad 4; ergo unitas eſt ad *C*, ut *B* ad *A*; proinde *C* eſt quotus quæſitus. Quod &c.

| *B* | *A* | *C* |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |

| *M* | *N* | |
|---|---|---|
| $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | 1. $\frac{4}{3}$ : : 3. 4 |

Coroll. Hinc patet ratio, cur in diviſione minutiarum quotus ſit major numero ipſo, qui dividitur; quod quidem accidit, cum diviſor minor eſt uni-

unitate. Nam cum diviſor ſit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando diviſor ad unitatem, ut dividendus ad quotum, adeoque ſi diviſor minor eſt unitate, etiam dividendus debet eſſe minor quoto.

Schol. *Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut* $634\frac{2}{3}$ *per* 5, *practici dividunt integrum per integrum, nempe* 634 *per* 5, *nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quotum* 126. *Tum ſi quid remanet (ut hic* 4 *) illud reducunt ad fractionem* per Prop. 6., *hoc eſt* $\frac{12}{3}$, *quam addunt ad fractum* $\frac{2}{3}$, *fitque ſumma* $\frac{14}{3}$ per Prop. 8., *quæ quidem ſumma diviſa per* 5 *dat quotum* $\frac{14}{15}$ per hanc Propoſ. n. 3., *unde quotus quæſitus eſt* $126\frac{14}{15}$.

---

## CAPUT IV.

### *De Fractionibus Decimalibus.*

### DEFINITIO I.

FRactiones Decimales ſunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur menſura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea diviſa in decem æquales partes, ſingulæ deinde hæ partes in alias decem partes, atque hæ ſingulæ rurſus in alias decem, & ſic deinceps, quantum quiſque velit; oriuntur ex hac diviſione partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ, centeſimæ milleſimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *ſecundæ*, *tertiæ*, *quartæ &c.* iiſque diſtinguendis apponuntur vir-

virgulæ, integris autem cifra o. Sic fractio decimalis, 5o. 8′ 6″ 4‴ 2⁗ ſignificat quinque integra, octo primas, ſex ſecundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed ſatis eſt virgulam ultimam apponere, & integra puncto diſtinguere, ut 5. 8 6 4 2⁗. Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$, ſeu $\frac{58642}{10000}$. At commodi gratia decimales ſcribuntur inſtar integrorum, omiſſo denominatore, modo ſupra explicato nempe 5. 8 6 4 2⁗.

Corol. I. Hinc ſequitur virgulas illas, ſive apices decimales, qui numeris opponuntur, eſſe loco denominatorum; ut in decimali 5. 8′ 6″ 4‴, apex unus importat denominatorum 10, duo apices denominatorem 100, tres denominatorem 1000 &c. hoc eſt $\frac{8}{10}$ $\frac{6}{100}$ $\frac{4}{1000}$.

Coroll. II. Itaque decimales ad eandem denominationem facile reducuntur; addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quod opus fuerit; ut ſi decimalis 3. 5′ reducenda ſit ad ſecundas, ad tertias, vel quartas &c. Scribitur 3. 5 0″, 3. 500‴, 3 5000⁗. Valor enim non mutatur, nam 5′ = 50″, 5″ = 50‴ &c. ut julii quinque ſunt aſſes 50.

Coroll. III. Si integro cifræ quotcunque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut ſi ad 3 addas o o o‴, ut fiat 3. o o o‴, non mutatur integri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000; nam $\frac{3000}{1000} = 3$.

Schol. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ *tunc loco integri ponitur zero, nempe* o. 8, o. 24, o. 725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{10}$ $\frac{24}{100}$ *&c.*

## DEFINITIO II.

Fractionum decimalium notæ dicuntur eſſe ejuſdem ordinis, ſeu gradus, quarum iidem ſunt denomina-

to-

tores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0. 5679, & 0. 045, notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejuſdem gradus, quia utrique reſpondet idem denominator, ſcilicet $\frac{6}{100}$, & $\frac{4}{100}$, idem $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique reſpondet idem apex, qui ſtat loco denominatoris *per Coroll.* 1.

## DEFINITIO III.

Progreſſio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes milleſimæ, ſed partes decimæ, aut centeſimæ nullæ ſunt; ut $4\ 2'\ 5'''$, ubi partes centeſimæ, & milleſimæ deſunt, quæ quidem cifris interpoſitis ſupplentur: ſic eadem decimalis, interpoſitis duabus cifris, erit $4.\ 2005''''$. Similiter $3.\ 5''\ 7''''$, fiet $3.\ 05007'''''$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ ſcribitur $0.\ 005'''$, & $3 \times \frac{45}{10000}$ ſcribitur $3.\ 0045''''$. Semper enim valor eſt idem; ut in *Coroll.* 2. & 3. fuit explicatum.

## PROPOSITIO I.

*Decimales addere, & ſubtrahere.*

Fractiones decimales addendæ, vel ſubtrahendæ ſic diſponantur, ut notæ decimales ejuſdem gradus ſibi mutuo reſpondeant *per Defin.* 2.; & ſi progreſſio ſit interrupta, ut in ſecundo exemplo ſequenti, ſuppleantur loca vacua *per Defin.* 3.: deinde additio, & ſubtractio fiat, ut in *Propoſ.* 2. & 4. *Cap.* 1.

Ad-

*Additionis exempla.*

| | |
|---|---|
| $A$ 3. 2 4 5‴ | 6. 2′ 7‴ = 5. 2 0 7‴ |
| $B$ 7. 3. 9″ | 6. 4′ 5″ = 6. 4. 5″ |
| $C$ 10. 6 3 5‴ | Summa 11. 6 5 7‴ |

Ratio horum patet ex dictis; nam ſi decimales $A$ & $B$ fiant ejuſdem denominationis *per Corol.* 2. erunt *per Cor.* 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$ proinde $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} =$ C 10. 6 3 5‴ *per Defin.* 1.

*Subtractionis exempla.*

| | |
|---|---|
| $A$ 4. 5 7 2‴ | 7. 4′ 2‴ = 7. 4 0 2‴ |
| $B$ 1. 2 9″ | 3″ 5‴ = 0. 0 3 5‴ |
| $C$ 3. 2 8 2‴ | *differentia* 7 3 6 7‴ |

Ratio plane eſt eadem ac additionis: nam ſi decimales $A$ & $B$ ad eandem denominationem reducantur *per Cor.* 2. erunt *per Cor.* 1. $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{1290}{1000}$; hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000}$ = C. 3. 282‴ *per Defin.* 1.

Schol. *Ut ex Integris decimales ſubtrahi poſſint, addantur integro tot zeri, quot ſunt apices decimalis ſubtrahendæ. Sit ad ſubtrahendum ex* 8 *integris tres centeſimas, hoc eſt* 0. 0. 3″, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* 8. 0 0″, *eritque reſiduum* 7. 9. 7″, *ut patet.*

PRO-

## PROPOSITIO II.

### *Decimales multiplicare.*

Fractiones decimales multiplicantur ut integra *per Prop.* 5. *Cap.* 1., nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad diſtinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur ſimul apices utriuſque factoris; ſumma enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera ſiniſtram verſus.

*Exempla.*

| | | |
|---|---|---|
| I. $4.05''$ | II. $0.745''$ | III. $0.000356''''''$ |
| $3.2'$ | $4.2''$ | $0.0048''''$ |
| 810 | 1490 | 2848 |
| 1215 | 2980 | 1424 |
| $12.960''$ | $0.31290'''$ | $0.0000017088^{x}$ |

Operandi modus ex dictis facile demonſtratur. Nam in primo exemplo $4.05'' = \frac{405}{100}$ & $3.2 = \frac{32}{10}$ *per Defin.* 1. Eſt autem *per Propoſ.* 10. *cap.* 3. $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000} = 12.960'''$ *per Defin.* 1. & *Coroll.* 1. quod eſt ejuſdem exempli primi productum.

Ex eodem primo exemplo manifeſtum eſt, tres tantum notas decimales in facto abſcindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad ſiniſtram zeri, quot deſunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

Schol.

Schol. I. *Quod ſi in alterutro factore progreſſio decimalis ſit interrupta ; ut ſi multiplicari oporteat* $4' \, 5'''$ *per* $3. \, 2''$, *primo progreſſio interpoſitis zeris fiat integra* per Definit. 3., *hoc eſt fiat* $4' \, 5''' = 405''$, & $3. \, 2'' = 3.02''$, *deinde multiplicando* $405''' \times 3.02''$ *habetur productum* $1.22310'''''$.

Schol. II. *Si factorum unus ſit numerus integer ſine ullo decimali , in producto numerantur tot notæ , quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorſus.* *Sic* $3 \times 4. \, 25'' = 12.75''$.

## PROPOSITIO III.

### *Decimales dividere.*

Fiat diviſio , ut in integris fieri ſolet *per Propoſ. 6. cap.* 1. ; utque notæ decimales in quoto diſtinguantur , ſubtrahe numerum apicum , quos habet diviſor , a numero apicum , quos habet dividendum ; reſiduum dabit numerum notatum decimalium , quæ numerari debent in quoto a dextera ſiniſtram verſus. Si quoti figuræ pauciores ſint , addantur cifræ , ut in tertio exemplo.

 *Exem-*

*Exempla.*

```
I.          3'')  0.1 3 5 6 3'''''  |  4. 5 2 1'''
II.     5. 2 4'')  1 8.8 6 4'''     |  3. 6'
                    3 1 4 4
                    ——0 0
III. 2 7. 5 8 9''') 0.3 5 4 ....   | 0.0 1 2 8 3'''''
                    2 7 5 8 9
                   ___________
                   — 7 8 1 1 0
                     5 5 1 7 8
                    ___________
                     2 2 9 3 2 0
                     2 2 0 7 1 2
                    ____________
                      — 8 6 0 8 0
                        8 2 7 6 7
                      ___________
                          3 3 1 3 &c.
```

Operandi ratio clara eſt. Nam in primo exemplo *per Defin.* 1. habetur $3'' = \frac{3}{100}$ & $0.13563''''' = \frac{13563}{100000}$, proinde dividendo numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem ac ſi eſſent numeri integri, habetur nova fractio $\frac{4521}{1000} = 4.521'''$ *per Defin.* 1. nempe quotus in primo exemplo inventus.

Schol. *Quod ſi diviſoris, aut dividendi decimalis progreſſio interrupta ſit, fiat integra* per Defin. 3. *deinde inſtituatur diviſio, ut ſupra dictum eſt.*

PRO-

## PROPOSITIO IV.

*Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.*

I. Eſto reducendus in partes v. g. decimas numerus 6. Ducatur 6 in 10, & producto ſubſcribatur denominator 10, erit $\frac{60}{10}$, ſeu 6 0' *per Defin.* 1. Similiter 28 ad centeſimas reductus erit $\frac{2800}{100}$, ſeu 28.00''.

II. Reducenda ſit fractio ex. gr. $\frac{3}{5}$ in partes milleſimas; ducatur numerator 3 in 1000, & productum dividatur per denominatorem 5, erit $\frac{3000}{5}=600$, unde apparet $\frac{3}{5}=\frac{600}{1000}=0.600'''$ *per Defin. cit.*

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda ſit in partes centeſimas milleſimas, hoc eſt in 100000. Operandum ut ſupra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, ſed $< 0.42858$, defectu exiſtente minori quam $\frac{1}{100000}$. Eſt enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem niſi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

Schol. *Hæc propoſitio maximum habet uſum, tum in diviſionibus, in quibus habetur reſiduum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque caſu ex hac propoſitione haberi poteſt fractio decimalis magis magiſque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, ſive radicis quæſitæ. Ratio autem operationis habetur ex regula proportionum, de qua inferius. Nam in ſecundo exemplo eſt* 5. 3 : : 1000. 600 *& ſic de aliis.*

## PROPOSITIO V.

*Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.*

Quæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulæ decimales $750''$. Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet, particulas decimales convertendas eſſe in partes duodecimas. Sunt autem *per Defin.* 1. particulæ $750'' = \frac{750}{1000}$. Ducantur igitur particulæ decimales 750 in 12, & productum dividatur per 1000; erit $\frac{9000}{1000} = 9$; habentur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $750'' = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, ſeu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter ſcire volo, quot aſſes, ſeu quot partes ſcuti Romani, quod in aſſes 100 dividitur, contineant decimales particulæ $5610''''$. Cum *per Defin.* 1. ſint $5610'''' = \frac{5610}{10000}$, ſi ducantur 5610 in 100, & productum dividatur per 10000, erit $\frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo aſſes $56 + \frac{1}{10}$, hoc eſt aſſes 56, & unius quadrantis Romani ſemiſſem. Ratio innititur regulæ proportionum, de qua inferius.

Schol. I. *Simon Stevinus, decimalium auctor ingenioſiſſimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas propoſuit, ſummo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur ſine moleſtia, non ſecus ac integri eſſent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus, Præſtetus, Reyneau, Wolfius, & alii hoc præclarum inventum illuſtrarunt, additis quoque demonſtrationibus, quæ in auctore deſiderabantur.*

Schol. II. *Ceterum fractiones decimales in omni fere Matheſi magni ſunt uſus, maxime vero in approximatione radicum in Algebra. Proinde Analyticis noſtris Inſtitutionibus hæc ipſa de calculo Decimali notitia fuit tanquam appendix adjecta.*

CA-

## CAPUT V.

### *De extractione Radicum.*

SI numerus quicunque ducatur in ſe ipſum, ut 3 × 3 producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item ſi ducas 4 × 4 oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in ſe ductis planum illud, ſeu quadratum oritur, dicuntur *latus* quadrati, ſeu *radix*, & exprimuntur hoc ſigno $\surd$, quod ſignum *radicale* vocant.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræſentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur *cubus*, & numeri illi 3 & 4, dicuntur *radix*, ſeu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod ſi cubus ipſe per ſuam radicem multiplicetur, ut 27 × 3, oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81 × 3, oritur *quadrato-cubus*, & ſic deinceps. Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, ſeu *poteſtates*; nempe vocant radicem dignitatem, ſeu poteſtatem *primam*: quadratum *ſecundam*, cubum *tertiam*, quadrato-quadratum *quartam*, quadrato-cubum *quintam* &c. quas etiam literis ſic exprimunt, $a^1$ $a^2$ $a^3$ $a^4$ $a^5$ &c.

### DEFINITIO. I

Extractio igitur radicis quadratæ, vel cubicæ &c. (ſeu ſecundæ, tertiæ, vel quartæ poteſtatis &c.) eſt inventio illius numeri, qui ſemel, bis, ter, vel

pluries in ſe ductus illam poteſtatem genuit, adeoque ab ipſa poteſtate denominatur radix ſecunda, tertia, quarta &c.

Si numerus datus centenarium non excedit, & ſit quadratus, ejus radix habetur ex tabella, quæ ſequitur; ut ſi quæratur radix quadrati 64, ejus radix invenitur 8. Quod ſi numerus non ſit quadratus, ut ex. gr. 50, ſumenda eſt ex eadem tabella radix proxime minor, hoc eſt 7, quæ in ſe ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 9 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 16 | 64 |
| 5 | 25 | 125 |
| 6 | 36 | 216 |
| 7 | 49 | 343 |
| 8 | 64 | 512 |
| 9 | 81 | 729 |

Schol. I. *Nota, quadratum majus ſuperare quadratum proxime minus duplo radicis quadrati minoris plus unitate. Sic* 16 *majus eſt quadrato* 9 *duplo radicis* 3 + 1, *hoc eſt* 7. *Item* 36 *ſuperat* 25 *duplo radicis* 5 + 1, *nempe* 11.

Schol. II. *Similiter cubus major ex. gr.* 64 *ſuperat cubum proxime minorem* 27 *triplo radicis cubi minoris ducto in radicem majoris cubi plus unitate, nempe* $9 \times 4 + 1 = 37$, *& ſic de aliis.*

PRO-

## PROPOSITIO I.

*Ex dato numero radicem quadratam, ſeu ſecundam extrahere.*

Sit numerus *A*, ex quo radix ſecunda extrahenda ſit.

```
       A  1 8 6 6 2 4    ( B
          1 6            ( 432
C 83) —   2 6 6
          2 4 9
D 862) —    1 7 2 4
            1 7 2 4
            0 0 0 0
```

1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde ſub antepenultima, & ſic deinceps, ut totus numerus diſtribuatur in membra (ut hic tria) quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad ſiniſtram, ſi numerus figurarum ſit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæſita conſtabit.

2. Quære ex tabula ſuperiori radicem primi membri ad ſiniſtram, nempe 18, hoc eſt radicem proxime minorem, ſcilicet 4, quam pone dextrorſum poſt lineam, ut in *B*.

3. Duc radicem 4 in ſe ipſam, & quadratum 16 pone ſub ipſo membro 18, ex quo ſubtrahatur; tum reſiduo 2 (quod notatur infra lineam) adde ſequentes duas figuras *66*, quæ ſimul faciunt *266*.

4. Radicem ipſam 4 duplica, fit 8, quem pone in C pro diviſore numeri *26* (excluditur enim ſem-

per a diviſione figura notata puncto ) & quotum inventum 3 appone tum radici in *B* , tum diviſori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes numeros in *C* poſitos , & productum 249 ſubſcribe numero 266; a quo facta ſubtractione remanent 17.

6. Adde huic reſiduo ſequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rurſus inſtitue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis 86, quem pone in *D* pro diviſore numeri 172 ( excluſa figura ultima ) quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum diviſori in *D*, & per ipſam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* 862. Deinde productum 1724 ſubſcribe ipſi numero 1724 , a quo debet ſubtrahi ; cumque nihil remaneat , ſignum eſt , datum numerum eſſe vere quadratum.

*Sit aliud exemplum*. Extrahenda eſt radix quadrata ex dato numero *M* 6015625.

1. Dividatur in membra per puncta , incipiendo dextrorſum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad ſiniſtram continet unam figuram nempe 6. Hujus radix proxime minor eſt 2, quam pone in *N* dextrorſus, ejuſque quadratum ſubtrahe ex primo membro 6, remanent 2, quibus adde duas figuras ſequentis membri nempe 01 , fiunt 201.

M

```
M  6 0 1 5 6 2 5     ( N
                       2452
   4
   ─────
R 44)  2 0 1
       1 7 6
Q 485) — 2 5 5 6
         2 4 2 5
   ─────────────
S 3902) — 1 3 1 2 5
            9 8 0 4
   ─────────────
            3 3 2 1
```

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone ſiniſtrorſum in *R*, divide 201 (relicta ſemper ultima figura notata puncto) quotus eſt 5, qui reponi deberet tum in *N*, tum in *R*, & per ipſum multiplicari numeri in *R*, nempe 45, ſed quia 45 × 5 producit 225, quod ſubtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus 5 minuitur unitate, & ponitur tam in *N*, quam in *R* quotus 4, qui ductus in 44 producit 176, quod ſubtractum ex 201 relinquit 25.

3. Adde huic reſiduo duas ſequentes figuras 56, efficiunt 2556. Repetenda eſt eadem operatio toties, quot reſtant membra in dato numero. Nimirum duplicanda eſt radix 24, & per ejus duplum 48, quod ponitur ſiniſtrorſum in *Q*, dividenda ſunt 255 (relicta ultima figura) quotus 5 eſt nova radicis figura, quæ ponitur in *N*, tum etiam in *Q*, & per ipſam multiplicando omnes figuras in *Q* exiſtentes, habetur productum 2425 ſubtrahendum ex 2556, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut ſupra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in *N* & *S*,



Digitized by Google

ac cetera proſequere, ut ſæpius dictum eſt.

Eſt igitur radix quæſita $N$ 2452, & remanent 3321, adeoque numerus datus non eſt revera quadratus.

Corol. Hinc patet, radicem inventam per diviſionem unitate eſſe minuendam, ſi productum, quod fit ex multiplicatione, majus ſit numero, a quo ſubtrahi debet; ut in ſecunda figura radicis inventæ factum eſt: quod quidem notetur.

Schol. I. *Quando diviſor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cifra, ſeu zero, ut ſi extrahenda ſit radix quadrata ex* 3714. *Quia ſublato ex primo membro* 37 *quadrato* 36 *radicis inventæ* 6, *remanet* 1, *cui ſi addatur ſequens figura* 1 *fit* 11, *( nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis ) qui numerus dividi nequit per duplum radicis* 6, *nempe* 12; *in hoc caſu ponitur in radice cifra* 0, *eritque radix* 60, *& habetur reſiduum* 114, *cui adduntur ſtatim ( ſi ſint ) aliæ duæ figuræ dati numeri.*

Schol. II. *Si numerus datus non eſt quadratus, ſed remanet reſiduum, ut in allato exemplo reſiduum* 114; *tunc fit ex reſiduo fractio, in qua reſiduum ipſum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero reſiduum ſit majus ipſa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia reſiduum* 114 *majus eſt tota radice* 60, *addita unitate ad duplum ipſius radicis, erit fractio* $\frac{114}{121}$, *ac tota radix* $60 + \frac{114}{121}$ ex Sch. 1. pag. 70.

Schol. III. *Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam* 2, *vel* 3, *vel* 7, *vel* 8, *vel cifram unam; ſed neceſſe eſt, ut ſit una ex his* 1, 4, 5, 6, 9, 00, *quibus conſtant numeri ſimplices quadrati.*

Schol. IV. *Extractio radicis quadratæ non eſt aliud niſi*

*niſi quædam diviſionis ſpecies, ut ex ipſa operatione manifeſtum eſt; hoc tamen diſcrimine, quod in diviſione communi diviſor eſt numerus datus, in hac vero debet inquiri diviſor, & quidem per plures partes, quæ ſunt ipſa radix. Proinde multiplicando radicem per ſe ipſam, v. g. in primo exemplo* 432 × 432, *reſtituitur numerus quadratus* 186624, *ut fieri ſolet in diviſione communi, ducendo quotum per diviſorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando ſcilicet per ſe ipſam radicem inventam, & addendo reſiduum, ſi forte ſit.*

*Demonſtr.* pendet à *Prop.* 4. *lib.* 2. *Eucl.* Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432 × 432, continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum 4 × 3. Tertio, bis rectangulum ex 43 × 2, ſeu rectangulum ex duplo ipſius 43, nempe 86 × 2; quod patet ad oculum, nempe:

```
1 6 . . . .
  1 2 . . .
  1 2,9 . .
      8 6 .
      8 6,4
-----------
1 8 6 6 2 4
```

Ex ſpecioſa tamen id longe clarius apparet, ſi loco numerorum 4, 3, 2, ſumantur literæ *a* + *b* + *c*; ut in noſtris *Inſtit. Analyt.*

## PROPOSITIO II.

*Radicem quadratam per Approximationem inquirere.*

Extracta radice quadrata, ſi quid remanet, ſignum eſt,

eſt, talem numerum non eſſe revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi poſſit. Quamvis autem vera radix ſit impoſſibilis, poteſt tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magiſque approximari, ita ut exceſſus, vel defectus a vera radice ſit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet poſt extractionem radicis, vel numero ipſi, a quo extracta fuit radix, tot cifrarum paria, quot volueris, nempe 00, ſeu 0000, 000000 &c. & ex numero reſiduo una cum prædictis cifris extrahe radicem ſecundam, ut moris eſt. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cifrarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cifris, quot paria fuerunt addita.

*Sit exemplum*. Extrahenda eſt radix ex numero 12, patet radicem eſſe 3, & remanere 3. Adde ipſi 12 tria cifrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero ſecunda radice *per Propoſ.* 1. *hujus* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cifrarum paria addita, erit radix $3 \frac{464}{1000}$ vera quidem minor, ſed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

Schol. I. *Si numero, ex quo radix ſecunda extrahitur, minutia adhæreat, reducitur minutia in partes centeſimas, & extrahitur radix. Extrahenda ſit radix ex* $6\frac{1}{4}$, *reduc fractionem in centeſimas* per Prop. 4. Cap. 3. *erit fractio* $\frac{25}{100}$, *cui adde 6, fit* $\frac{625}{100}$, *cujus radix quadrata erit* $2 \frac{5}{10}$.

Schol. II. *Quod ſi denominator minutiæ, quæ integro adhæret, ſit numerus quadratus, poterit numerus integer ad unam cum ipſo minutiam reduci, & inde extrahi radix. Sic in ſuperiori exemplo* $6 \frac{1}{4}$ *fiet* $\frac{25}{4}$, *extractaque ſeorſim tum ex denominatore, tum ex nume-*

*meratore radice, habetur* $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, *ut antea. Unde patet modus extrahendi radicem quadratam ex meris fractionibus, quæ numeris quadratis conſtant.*

Schol. III. *Si vero denominator fractionis, ex qua radix erui debet, non ſit numerus quadratus, ut ſi data ſit fractio* $\frac{4}{7}$; *tunc multiplicato numeratore per denominatorem, extrahitur ex facto radix, cui ſupponitur ipſemet denominator. Erit igitur datæ fractionis radix* $\frac{5}{7}$. *Ratio eſt, quia* $\frac{4}{7} \times 7 = \frac{28}{49}$ per Ax. 3. Cap. 3. *Æqualium autem fractionum æqualis eſt radix, proinde* $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{5}{7}$.

Schol. IV. *Fractio non quadrata fieri poteſt quadrata per diviſionem, vel multiplicationem. Sic* $\frac{12}{27}$ *diviſa per* 3 *fit* $\frac{4}{9}$ per Ax. 3. *Similiter* $\frac{2}{8} \times 2$ *fit* $\frac{4}{16}$ per idem Ax. *Ex quibus habetur radix quadrata, ut patet. Ceterum tam pro integris, quam pro fractis radix maxime propinqua haberi poteſt per Logarithmos, in quibus inferius.*

## PROPOSITIO III.

*Ex dato numero radicem cubicam extrahere.*

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorſum, ita ut ſingula membra contineant tres figuras excepto primo membro, quod aliquando duas, vel unam tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri ſiniſtrorſum, ſi ſit numerus cubicus; ſin minus, ſume radicem cubi proxime minoris in tabella ſuperius poſita, quæ in hoc exemplo eſt 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*.

3. Ex hac radice fiat cubus 8, quem ſubtrahe ex primo membro 12, & reſiduum 4 ſcribe infra lineam, ut in *C*.

4. Ad

4. Ad hunc reſiduum adde unam ſequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radicis figura, quam pone in *B*.

5. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui ſubtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat ſignum eſt, numerum datum eſſe revera cubum.

| | | |
|---|---|---|
| | *A* 1 2, 1 6 7 | *B* |
| | 8 | 23 |
| 1 2 ) | C 4 1 | |

Hæc operatio toties repeti debet, quot ſunt membra numeri dati, ut in ſequenti exemplo erit manifeſtum.

*Sit aliud exemplum*. Eſto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 eſt 2, quam pone in *N*, ejuſque cubum 8 ſubtrahe ex 11, remanet 3, quem ſcribe infra lineam in *R*.

2. Adde reſiduo *R* ſequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ 2, hoc eſt per 12, quotus 2 erit ſecunda figura radicis, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc reſiduum *T* addatur ex tertio membro numeri *M* figura 6, fiet 7426, qui diviſus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc eſt per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in *N*, eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe

pe 11390625, qui ablatus ex numero *M* nihil relinquit, proinde numerus datus eſt cubus.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *M* | 1 1,3 9 0,6 2 5<br>8 | *N*<br>225 |
| 12) | *R* | 3 3 | |
| | *S* | 1 1 3 9 0<br>1 0 6 4 8 | |
| 1452) | *T* | — 7 4 2,6 | |

Ratio autem pendet ab ipſa cuborum geneſi. Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27, partium 2 & 3. Secundo triplum quadrati radicis $2 \times 3$. Tertio triplum quadrati radicis $3 \times 2$, hoc eſt

```
8 . . .
3 6 . .
  5 4 .
    2 7
-------
1 2 1 6 7
```

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Newtono *Arithmet. Univ.*, & tribus pauciſſimis continetur. 1. Ad reſiduum, quod oritur ex ſubtractione cubi ex unoquoque numeri dati membro, additur una tantum ſequentis membri figura. 2. Diviſo illo reſiduo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi ſint) fit cubus, qui ſubtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot ſunt ipſi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis ſatis patent.

Schol.

Schol. I. *Cum aliquid remanet, ſignum eſt, numerum datum non eſſe cubicum, ac proinde radicem inventam non eſſe numeri dati, ſed maximi cubi in eo contenti. Reſiduum exprimitur per fractionem hoc pacto: reſiduum ipſum ponitur ſupra lineam loco numeratoris; pro denominatore autem ſumitur differentia inter cubum datum, & cubum proxime majorem minus unitate. Sit exemplum, extracta radice cubica ex numero* 46, *habetur radix* 3, *& reſiduum* 19, *quod erit fractionis numerator; differentia autem inter cubum* 27 *ex radice* 3, *& cubum proxime majorem* 64 *ex radice* 4, *eſt* 36 + 1 per Schol. 2. ad Defin. *Auferatur unitas, remanent* 36 *pro denominatore fractionis. Eſt ergo radix cubica numeri dati* $3 + \frac{19}{36}$.

Schol. II. *Si quis propinquiorem radicem, & quæ a vera inſenſibiliter differat, cupit, addat aliquot ciſrarum ternarios ad ipſum numerum datum, & proſequatur radicis extractionem. Deinde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot ciſrarum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipſæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot ciſris, quot ternarii ciſrarum fuerunt additi, eo ſere modo, quo de radice quadrata diximus.*

Schol. III. *Ceterum tam cubica, quam aliæ ſuperiorum poteſtatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur; maxime per formulas Newtonianas, quæ generales ſunt, & ad omnem radices extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.*

*Examen* habetur ter ducendo in ſemet radicem cubicam inventam, & addendo illi reſiduum, ſi quod fuit. Reſtituitur enim cubus, ſeu numerus datus, ſi erratum non ſit.

PRO-

## PROPOSITIO IV.

*Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.*

Ex dictis ſatis patet ratio extrahendi radices ex fractionibus communibus. Pro Decimalibus autem peculiaris eſt regula.

I. Si extrahenda ſit radix quadrata, obſervetur, an decimalis dati apex maximus ſit par, ut in *A*; tunc enim extrahitur radix omnino, ut ex integris *per Prop.* 1. *hujus*; & prima radicis nota afficitur apicis maximi dimidio, ut in *B*.

Si vero apex maximus ſit impar, ut in *C*, adjecta cifra, fiat par, ut in *D*, extractaque radice, ut ſupra, habetur radix quæſita, ut in *E*.

| | |
|---|---|
| *A* $23.04''$ ( $48'$ *B* | *C* $22.500'''$ |
| | *D* $22.5000''''$ ( $1.50'$ *E* |

Patet ratio cur prima radicis nota affici debeat dimidio apicis maximi decimalium. Nam ſi ſit quadratum cum cifris 2, 4, 6 &c. ut 100, 10000, 1000000 &c. unitas ipſa cum dimidio ejuſmodi cifrarum erit radix quadrata, nempe 10, 100, 1000 &c. Cum igitur apices ſtent loco denominatorum *per Coroll.* 1. *Cap.* 4. conſtat propoſitum.

II. In extractione autem radicis cubicæ obſervetur, an apex maximus decimalium triſecari poſſit, ut contingit in *M*; tunc enim extrahitur radix cubica, ut ex integris *per Prop.* 3. *hujus*, & prima radicis nota afficitur apicis maximi triente, ut in *N*.

Si vero maximus apex triſecari nequeat, ut vides in *R*; adjice unam, vel duas cifras, ut triſecari poſſit, ut in *S*; tum extrahe radicem cubicam *T*, ut ſupra.

$M\,1.728'\;(\;1.\;2'\,N$ | $R\,26.\;2\;1\;4''''4'''''$
$S\,26.\;2\;1\;4\;400''''''(0.64''T$

*Demonſtr.* ſimilis eſt præcedenti. Nam ſi fiat cubus ex unitate cum aliquot cifrarum ternariis, ut 1000, 1000000 &c. unitas ipſa cum cifrarum triente erit radix cubica, nempe 10, 100 &c. proinde prima radicis cubicæ nota afficitur triente maximi apicis, cum apices ſint loco denominatorum, ut dictum eſt *per Coroll. ſupra citatum*.

## PROPOSITIO V.

*Quæſtiones aliquot reſolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.*

1. Dux exercitus habet ſtrenuos milites 1326, quos omnes in acie quadrata ad prælium ordinare vult, quæritur, quot milites in fronte, ſeu latere ſtabunt, & quot futuri ſint ejus agminis ordines.

Ex dato numero 1326 extrahatur radix quadrata *per Prop.* 1. *hujus*, quæ erit 36. cum reſiduo 30. Conſtabunt igitur ſinguli ordines militibus 36, eruntque ordines pariter 36. Remanent autem milites 30. Proinde ut ipſi quoque in acie diſponantur, augeri debet quadrati latus unitate, ita ut ſinguli ordines habeant milites 37. Itaque duplicetur radix 36, fit 72, additaque unitate habetur 73, numerus ſcilicet militum addendorum ad quadratum lateris 36. Sed 30 jam ſupererant, ergo 43 tantum erunt addendi ad numerum 1326, ut fiat 1369, numerus quadratus, cujus radix 37. Hoc patet *ex Schol.* 1. *hujus*.

2. Eſt turris alta pedes 100, quæ in ambitu habet foſſam latitudinis pedum 40, fabricanda eſt ſcala, quæ ab ulteriore ripa pertingat ad cacumen turris,

ris, quæritur ejus longitudo.

Fiant quadrata numerorum 100, & 40, quæ ſimul addantur, fit ſumma 11600. Hinc extrahe radicem quadratam, erit ſcalæ fabricandæ longitudo pedum 107 + $\frac{151}{215}$ *per Prop.* 1. *& Schol.* 2. *ejuſdem*.

3. Volo fieri circulum duplum, triplum, quadruplum &c. alterius circuli dati, ſeu cujus nota eſt diameter in aliqua menſura.

Sit diameter circuli dati pollicum 6, lin. 5, & quæratur circulus ejus duplus. Reducantur pollices ad lineas, eos multiplicando per 12, & addendo producto lineas 5, fient lineæ 77, quarum duplum eſt 154, qui numeri inter ſe multiplicentur, & ex producto 11858 eruatur radix quadrata, quæ invenitur 108 + $\frac{97}{108}$ *per Propoſ.* 1. Circuli ergo dupli diameter erit linearum 108 + $\frac{97}{108}$, hoc eſt pollicum 9 + $\frac{97}{108}$ unius lineæ.

Schol. *Quod de circulo dictum eſt, extenditur quoque ad quodlibet Polygonum regulare, nempe Quadratum, Pentagonum, Exagonum &c. ſi eorum duplum, triplum, quadruplum inveniri oporteat, dato uno ipſorum latere. Sed hæc ad Geometriam pertinent*, & a Prop. 20. l. 6. Eucl. *derivantur*.

4. Fabricanda eſt ciſterna cubica, quæ contineat aquæ pedes cubicos 68921, quæritur quanta futura ſit ejus latitudo, longitudo, ac profundum.

Ex numero 68921 extrahatur radix cubica, quæ *per Propoſ.* 3. *hujus* dat pedes 41, unde innoteſcunt omnes ipſius ciſternæ dimenſiones.

5. Data diametro globi ferrei, lapidei, vel plumbei, qui libram unam ponderat, quæritur diameter pro globo ejuſdem materiæ librarum 2, 3, 5 &c.

Diameter data intelligatur diviſa in partes 100, erit ejus cubus 1000000. Tum ex ejuſdem cubi duplo, triplo, quadruplo &c. nempe 2000000, 3000000, 4000000 &c. radix cubica extracta per *Propoſ. cit.*

dabit diametrum quæſitam globi librarum 2, 3, 4 &c. Seu, cubus diametri datæ ducatur in pondus, ſeu in numerum librarum globi, cujus diameter quæritur, & extrahatur ex producto radix. Invenienda ſit diameter globi plumbei librarum 8; cubus 1000000 × 8 = 8000000, cujus radix cubica 2000 dat diametrum quæſitam. Hæc eſt *regula calibræ*, cujus ope ex data diametro globi unius libræ diametri reliquorum globorum ejuſdem materiæ determinantur; & hinc quoque innoteſcit tormenti bellici cavitas, ſeu diameter.

6. Depopulante ſæviſſima lue Athenas, conſultus fuit Apollo Delius, quo pacto illa ceſſaret; reſpondit, peſtem ceſſaturam, ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Hinc ortum eſt celebratiſſimum de duplicatione cubi problema.

Fuerit igitur ejus cubi latus palmorum 12, cujus duplum 24. Fiat ex 12 quadratum, quod multiplicetur per 24, erit 12 × 12 = 144 × 24 = 3456. Extrahatur hinc radix cubica, quæ dat palmos 15 + $\frac{81}{720}$ ( = $\frac{9}{80}$ ). Igitur ara illa cubica fabricari debet ex latere palmorum 15 cum fractionibus, proinde problema erit practice, non autem Geometrice ſolutum, quod ab oraculo petebatur. Ratio hujus, & præcedentis pendet *ex Prop.* 18. *l.* 12. *Eucl.*, & *Prop.* 12. *Cap.* 6. *ſequentis*, quæ hujus loci non ſunt. Sed hæc pauca ſufficiant ad indicandum uſum extractionis radicum, qui in univerſa fere Matheſi in immenſum patet.

CA-

## CAPUT VI.

### *De Regulis Arithmeticis.*

REgulæ Arithmeticæ ſunt quatuor. 1. Eſt regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Poſitionis, vel falſi. Prima eſt omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla ſunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

## DEFINITIONES.

I. *Ratio*, ſive *proportio* eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. Ut ſi compararetur 12 ad 4, intelligitur 12 continere ter 4, & habere rationem tripli: alter terminus dicitur *antecedens*, alter *conſequens*.

II. Duæ rationes dicuntur *ſimiles*, *eædem*, vel *æquales* ( quod idem eſt ) cum antecedens unius toties continet ſuum conſequentem, quoties antecedens alterius continet ſuum conſequentem. Vel cum antecedens unius toties continetur in ſuo conſequenti, quoties antecedens alterius continetur in ſuo conſequenti. Sic 12. 4 :: 3. 1. ſunt rationes ſimiles, vel eædem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent ſuos conſequentes 4 & 1, & 4. 12 :: 1. 3. dicuntur ſimiles, quia 4 & 1 ter continentur in ſuis conſequentibus 12 & 3.

III. Quatuor illi termini, ſeu quantitates eandem rationem habentes, ut 12. 4 :: 3. 1. dicuntur *Proportionales*. Et ſi termini medii bis ſumantur, ita ut eadem quantitas ſemel ſit conſequens reſpectu præ-

cedentis, & ſemel antecedens reſpectu conſequentis, ut 2, 4, 8, in quibus 4 bis ſumitur, dicuntur *continue Proportionales*. Si vero nullus terminus bis accipitur, ut 10. 5 :: 2. 1, dicuntur termini *diſcretim proportionales*.

## L E M M A T A.

I. Si quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale eſt facto ex ſecundo, & tertio. Eſt *Propoſ.* 19. *lib.* 7. *Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5. 20 :: = 16.

Sicuti 5 $\times$ 16 dant = 80

Ità etiam 20 $\times$ 4 dant = 80.

II. Si datis quatuor numeris, primus ſe habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad ſecundum, factum ex primo, & ſecundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 eſt eadem proportio dupla, quæ eſt inter 8 & 4, erit 6. 3 :: 8. 4; ergo *ex lem.* 1. $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$; ergo factum ex primo, & ſecundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

III. Si factum dividatur per unum ex ſuis factoribus prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v. g. 24, quod ortum ſit ex $4 \times 6$, ſi dividatur per 6 oritur 4.

## P R O P O S I T I O I.

### *De Regula Proportionum.*

Regula *Proportionum*, quam ob præſtantiam & immenſam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem pro-

proportionem ad tertium numerum datum, quam ſecundus habet ad primum; ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Diſponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæſtionem habet annexam, ſtatuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc eſt homogeneus, hoc eſt qui eandem rem ſignificat ac terminus tertio loco poſitus, primò loco ponatur.

II. Multiplica tertium per ſecundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæſitum. Res tribus exemplis illuſtratur.

1. Ulnæ panni 2 ſtant ſcutis 9, quot ſcutis ſtabunt ulnæ 12 ejuſdem panni? terminus qui habet annexam quæſtionem, ſunt ulnæ 12: hic ſtatuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, ſcilicet

*Ulnæ 3. ſcut. 9 :: ulnæ 12. ſcut....*

Duc 12 × 9, & productum 108 divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæſitum. Nam, ut patet

3. 9 :: 12. 36.

2. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet operario quotidie ſolviſſe tantum aſſes 10. Quot ſcuta Romana ſingulis diebus expendit?

*Si oper. 1. aſſes* 10, *quid oper.* 180000?

Multiplicatis 180000 × 10, producitur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto pro-

 por-

portionali aſſes 1800000. Hos divide per 100 ( reſectis duabus cifris ) fiunt ſcuta Romana ſingulis diebus ſolvenda 18000.

3. Fixarum motus ex Ricciolio & Flamſteedio ſingulis 100 annis procedit gr. 1, 23'. 20", quot anni requiruntur ad totum cœli ambitum, ſeu gr. 360 percurrendos? Primo gr. 1. 23'. 20" reducantur ad minuta ſecunda per multiplicationem, ſcilicet $1 \times 60 + 23 = 83 \times 60 = 4980 + 20$ fiunt 5000. Similiter gr. $360 \times 60 \times 60$ fiunt 1296000. Dic jam, ſi minuta ſecunda 5000 dant annos 100, quot annos dabunt minuta ſecunda 1296000? Invenientur per regulam auream anni 25920, qui nimirum annum Platonicum conficient.

$$5000 . 100 :: 1296000 . 25920 .$$

Coroll. Ex hoc exemplo manifeſtum eſt, terminos proportionales regulæ aureæ, antequam regula ipſa inſtituatur, in homogeneos eſſe reducendos, ſi forte numeris heterogeneis conſtent. Sic ſi dicatur, libræ 5 unc. 3 veneunt ſcutis 4, & aſſibus 50, quot ſcutis ſtabunt libræ 12? Libræ reducendæ ſunt ad uncias in primo & tertio termino, & ſcuta ad aſſes, & tres termini proportionales erunt unciæ 63, aſſ. 450, unc. 144.

Schol. *Cum integris adhærent fracti, prius integri reducuntur ad fractos, integris autem, quibus nulla eſt fractio, ſupponitur unitas; deinde regula proportionum fit, ut dictum eſt. Si dicatur, hora* $1\frac{1}{4}$ *fluunt ex aliquo canali libræ* 15 *aquæ, quot libræ fluent horis* $2\frac{1}{3}$? *Termini proportionales redacti erunt* $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{7}{3}$. *Tum operando juxta præcepta tradita in* Prop. 10. *&* 11. Cap. 3. *invenies aquæ libras* $26\frac{2}{3}$.

*Demonſt.* clare infertur *ex lemm.* 1. & 3. Nam cum in regula proportionum ſupponantur dati tres nu-

numeri proportionales, & quartus, qui eſt ignotus, dari poſſit; factum ex ſecundo, & tertio æquale erit (*per lem.* 1.) facto ex primo, & quarto, qui eſt ignotus. Proinde ſi factum ex ſecundo, & tertio dividatur per primum, innoteſcet quartus terminus (*per lem.* 3.); ergo patet ratio, cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per ſecundum terminum, & factum dividi per primum.

*Examen* regulæ proportionum omnium expeditiſſimum habetur multiplicando primum terminum per quartum, & ſecundum per tertium. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene proceſſit. Ratio patet *ex lem.* 1.

## PROPOSITIO II.

### *De regula proportionum Compoſita.*

Regula proportionum *Compoſita* dicitur, cum præter tres terminos in *Propoſ. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedunt, qui ſignificant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres ſolum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10. aureos 50; quæritur quot aureos ſolvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini ſunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juvenes 4 ſpectant dies 10, & ad juvenes 12 dies 30. Duc itaque $4 \times 10$, & $12 \times 30$, habentur duo termini compoſiti 40, & 360. Dic ergo

*Si* 40 *dant aur.* 50, *quid* 360?

Multiplicando $360 \times 50$, & productum dividendo per 40, ut in *præc. Propoſ.* factum eſt, in-

invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis traſvectæ Romam per miliaria 300 poſcunt ſcuta 40; quæritur expenſa pro tranſvehendis libris 400 ejuſdem mercis per miliaria 500? Tres termini principales ſunt libræ 200, ſcuta 40, & libræ 400. Minus principales ſunt miliaria 300, & 500; qui ſi multiplicentur per ſuos terminos principales, fient tres termini pro regula trium inſtituenda, nimirum

$$6000 . 40 :: 200000 . 133\frac{1}{3} .$$

Schol. I. *Regula proportionum compoſita eſt regula ſimplex proportionum repetita; unde etiam regula* Dupli *dicitur, quia duplicem quæſtionem involvit. Proinde reſolvi etiam poteſt in duas regulas ſimplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quæritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumſtantiæ, ſeu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus. Sic in ſuperiori exemplo dic, ſi libræ* 200 *exigunt ſcuta* 40, *quid libræ* 400? *Quartus proportionalis eſt* 80, *ut patet. Dic ſecundo ſi milliaria* 300 *dant* 80, *quid milliaria* 500? *Invenitur quartus proportionalis, ut ſupra*, $133\frac{1}{3}$.

Schol. II. *Hæc regula dicitur etiam* del Cinque, *quia terminos quinque notos ſupponit. Examen fit ut in* præc. Propoſ.

## PROPOSITIO III.

### *De Regula proportionum Inverſa.*

In regulis proportionum cum ſimplici, tum compoſita jam explicatis, ita ſe habet primus terminus ad ſecundum, ſicuti tertius ad quartum, ut exempla alla-

allata ſatis monſtrant, proinde ex *Propoſ.* 14. *lib.* 5. *Eucl.* ſi primus terminus major, vel minor eſt tertio, etiam ſecundus major, vel minor eſſe debet quarto, ut conſideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipſa natura quæſtionis, ut quanto major, vel minor primus terminus eſt tertio, tanto major, vel minor reciproce eſſe debeat terminus quartus ſecundo. In hoc caſu regula proportionum dicitur *inverſa*, quia ſcilicet terminorum ordo invertitur. Hærent hic tirones primo, non bene dignoſcentes, utra regula ſit adhibenda. Sed quæ ſequuntur exempla, rem ſatis illuſtrant.

1. Meſſores 20 ſegetem aliquam metunt diebus 4, quæritur quot diebus illam metere poſſint meſſores 10? Patet major tempore, adeo ut quanto major eſt terminus primus tertio, tanto major quoque debeat eſſe quartus incognitus ſecundo. Nam

*Meſſ. dies Meſſ. dies*
20. 4 :: 10. 8.

2. In obſeſſa Urbe ali poſſunt milites 1500 menſibus 3, quæritur quot milites ali poterunt menſibus 6? Certe minor numerus. Proinde quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor quartus erit ſecundo, ſcilicet,

*Menſ. Mil. Menſ. Mil.*
3. 1500 :: 6. 750.

3. Ex panno habente latitudinem palmorum 3 requiruntur mihi pro veſtimentis ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, qui latitudinem habet palmorum 4. Certum eſt, pauciores requiri, adeoque quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor erit quartus ſecundo, nempe

*lat.*

*lat. pal. uln. lat.pal. uln.*
3. 10 :: 4. $7\frac{1}{2}$.

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inverſa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per ſecundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20 × 4, productum 80 dividatur per 20, habetur quartus proportionalis 8.

*Demonſtr.* ſequitur *ex* 2. *&* 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inverſa cum ſe habeat primus terminus ad tertium, ut reciproce, quartus ad ſecundum, erit *ex* 1. *lemm.* productum ex primo & ſecundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus ſcilicet tertio loco poſitus, ergo ſi per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & ſecundo, prodibit *ex lemm.* 3. quartus proportionalis quæſitus.

*Examen* itaque regulæ inverſæ fit breviſſime, multiplicando primum terminum in ſecundum, & tertium in quartum. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene peracta eſt.

Schol. I *Arithmetici, in quibus Tacquet, aſſignant dignoſcendæ hujus regulæ indicium hujuſmodi. Cum proponitur aliqua res diverſa a quatuor terminis quæſtionis, tunc proportio erit reciproca, ſeu inverſa. Sic in primo exemplo proponitur ſeges metenda, quæ eſt res omnino diverſa a quatuor terminis proportionalibus. In ſecundo exemplo proponitur annona, quæ eſt res diverſa a quatuor terminis ejuſdem quæſtionis. Similiter in tertio veſtis conficienda, quæ proponitur, eſt quid diverſum a terminis in quæſtione datis. Hoc dictum ſit in gratiam tironum. Ceterum ex ipſa quæſtionis natura facile dijudicari poteſt, utrum proportio directa ſit, an inverſa,*

Schol.

Schol. II. *Si terminus, qui annexam habet quæſtionem, ponatur primo loco, ſecundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inverſa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo meſſores* 10 *ſe habent ad meſſores* 20, *ut dies* 4, *ad dies* 8, *proinde ducendo* 20 $\times$ 4, *& dividendo productum* 80 *per primum terminum* 10, *habetur quartus proportionalis, ut in* Propoſ. 1. hujus. *Similiter in ſecundo exemplo menſes 6 ad menſes* 3 *ita ſe habent, ut milites* 1500 *ad milites* 750, *adeoque producto ex* 3 $\times$ 1500 *diviſo per primum terminum* 6, *oritur quartus proportionalis* 750, *ut antea.*

Schol. III. *Regulam inverſam compoſitam ultro omittimus, quod tirones haud parum ſoleat confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.*

## PROPOSITIO IV.

*Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.*

I. Cum in regula directa primus terminus præciſe continet ſecundum, vel (quod idem eſt) præciſe continetur in ſecundo, tunc reduci poteſt proportio ad minimos *per Prop.* 2. *Cap.* 3., & regulæ praxis breviſſima evadit. Sit exemplum, lib. 4 valent ſcuta 12, quid libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic ſi 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3 $\times$ 9, habetur quartus proportionalis 27, quia unitas non dividit.

Pro regula inverſa in primo exemplo *Prop.* 3. Si meſſores 20 exigunt dies 4, quid meſſores 10? Quia 20 ad 10 ſe habere debet reciproce, ut quartus terminus ad ſecundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic ſi 2 dat 4, quid 1? ductiſque 2 $\times$ 4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad

II. Ad evitandum diviſionis prolixioris tædium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in ſecundum: vel dividatur ſecundus per primum, & quotus ducatur in tertium; in utroque enim caſu operatio fit brevior. Ut ſi leucæ 25 dant milliaria Italica 60, quid leucæ 100? Diviſis 100 per 25, duc quotum 4 $\times$ 60, erit 240 quartus proportionalis quæſitus. Vel diviſo 60 per 25, quotus 2 $\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{1200}{5}$, ſeu 240, erit quartus proportionalis quæſitus.

III. Regula proportionum confici poteſt per ſolam diviſionem, nimirum dividendo primum terminum per ſecundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent milliaria Italica 120, gradus 360 quot milliaria continebunt? Diviſo primo termino per ſecundum, habetur $\frac{2}{120}$ hoc eſt $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360. quotus $\frac{21600}{1}$ dat miliaria Italica quæſita.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut ſi dicatur 12 $\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales ſine fractionibus 25, 4, & 40. Si afficiant ſolum ſecundum terminum, ut 6 dant 20 $\frac{1}{3}$, quid 10? Satis eſt multiplicare per eundem denominatorem 3 primum & ſecundum terminum, erunt termini proportionales 18, 61, & 10. Similiter ſi fractiones ejuſdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut ſi dicatur 3 $\frac{2}{5}$ dant 20. quid 10 $\frac{3}{5}$? Multiplicatis iiſdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula ſine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Si termini ſibi reſpondentes ſint minutiæ ejuſdem nominis, ut $\frac{2}{3}$ dat 20, quid $\frac{1}{3}$? Deletis denominatoribus erunt termini proportionales 2, 20, 1. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, ſatis patet.

Schol. *Hæc, aliaque ſimilia compendia dicuntur* Italica,

lica, *vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia uſum habeant frequentiorem*.

## PROPOSITIO V.

### *De Regula Societatis*.

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ ſocietatem ineuntes frequenter adhiberi ſoleat.

Sint mercatores *A*, *B*, *C*, qui ſocietate inita, lucrati ſunt aureos 800. *A* poſuit in ſortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quæritur quantum quiſque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam ſummam ſingulorum pecuniam, nempe aureos 500. Deinde inſtituatur toties regula proportionum, quot ſunt ſingulorum pecuniæ, ita ut primus terminus ſemper ſtatuatur ſumma pecuniæ collatæ, ſecundus lucrum aureorum 800, tertius vero uniuſcujuſque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo ſi 500 dat 800, quid 100 ? 160
quid 160 ? 256
quid 240 ? 384
800

Patet lucrum *A* fuiſſe aureorum 160, lucrum *B* 256, & C 384, quæ ſimul efficiunt ſummam lucri, adeoque ſtatim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuſcujuſque pecunia multiplicari debet per ſuum tempus. Cetera peragenda, ut ſupra.

*Sit exemplum*. *A* poſuit in ſortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, C vero aureos

reos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500, quæritur ſingulorum lucrum. Duc 50 × 2, 100 × 3, & 200 × 1, producta dant ſummam 600: quæ erit primus terminus proportionum: ſecundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia ſingulorum per ſuum tempus multiplicata.

Dic ergo ſi 600 dant 500, quid 100? $83\frac{1}{3}$
quid 300? 250
quid 200? $166\frac{2}{3}$

500

Eſt igitur lucrum ipſius *A* aureorum $83\frac{1}{3}$. Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum $166\frac{2}{3}$ quæ addita faciunt aureorum ſummam 500.

III. Quod ſi ſingulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale: nam *A* reliquit in ſocietate pecuniam ſuam menſibus 7, *B* vero menſibus 6, *C* denique menſibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam ſummam menſes, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus; ſecundus erit lucrum; tertius menſes ſingulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, ſecundi 240, tertii 480.

*Si menſes aur. quid menſes*
25. 1000 :: 7? 280
6? 240
12? 480

1000.

Coroll. Hinc apparet modos dividendi pecuniam v. g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino ſuo ſervierunt, quorum primus ſer-

ſerviverit annis 7, ſecundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ ſimiles quæſtiones ex hac regula facile ſolvuntur, quæ non eſt, niſi regula proportionum ſæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum eſt, intelligi eodem modo debet de damno, ſi ſocietati improſpere ceſſerit, ac damnum in ſingulos ſit dividendum habita ratione pecuniarum, & temporis.

## PROPOSITIO VI.

### *De Regula Alligationis.*

Cum variæ res diverſi pretii inter ſe alligantur, ſeu miſcentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti reſpondens inquiritur: ſeu, cum pretio quodam medio propoſito, quæritur, quantum ex ſingulis mercibus, aut liquoribus miſceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi poſſint, in utroque caſu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla ſatis ſuperque innoteſcet.

I. Conflanda eſt ſtatua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera poſuit, alterum quod in ſingulas libras ſtat ſcutis 30, alterum vero ſcutis 25. Ex priore poſuit libras 120, ex poſteriore libras 180. Quæritur quot ſcutis ſtabit in ſingulas libras ejuſmodi ſtatua?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Duc libras | $120 \times 30$ | fit | 3600 |
| | $180 \times 25$ | | 4500 |
| | | | 8100. |

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius libræ pretium. Nam ſi lib. 300 valent ſcut. 8100, quid

lib. 1? Ex regula aurea habentur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, menſura 1 primi generis ſtat juliis 24, ſecundi generis menſura 1 valet juliis 35. Si quis non habeat niſi julios 33, & menſuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium ſtatutum ſub altero 24 & 35, & ad ſiniſtram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia ſtatuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, ſed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc eſt 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in ſequenti exemplo factum vides.

2. Colliganrur differentiæ in unam ſummam, ut hic 11, & inſtituatur regula trium toties, quot ſunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut ſumma differentiarum 11 occupet primum locum, menſura vero 1 ſecundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, ſi 11 dat 1, quid 2? Rurſus, ſi 11 dat 1, quid 9? Invenies ex potiori vino accipiendas eſſe $\frac{9}{11}$ unius menſuræ, ex altero vero $\frac{2}{11}$, quæ ſimul ſumptæ faciunt $\frac{11}{11}$, hoc eſt menſuram unam quæſitam.

| | *Pretia* | *Differ.* | | |
|---|---|---|---|---|
| 33 | 24 | 2 | Si 11 dat 1, quid 2? | $\frac{2}{11}$ |
| | 35 | 9 | quid 9? | $\frac{9}{11}$ |
| | Summa | 11 | | $\frac{11}{11}$ |

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia ſtatuta proponuntur, ita tamen ut ſaltem unum ſit majus, alterum vero minus pretio arbitrario; tunc plures fieri debent alligationes, quod exemplo ſatis vulgari explicatur.

Libra 1 Garyophili valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gra-

gratia ſint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium ſit *M* Quæritur, quantum quis debeat ex ſingulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo diſponantur ordinatim pretia, ut in exemplo ſequenti. Secundo alligentur inter ſe duo pretia *A* & *D*, hoc eſt comparentur ambo cum pretio *M*, ut inveniantur differentiæ exceſſus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo ſuperius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* ( idem pretium alligari poteſt pluries ) differentiæ exceſſus eſt 2, defectus autem eſt 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rurſus *D*, differentiæ ſunt 2 & 1, quæ pariter ſtatuantur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiæ in unam ſummam, quæ hic eſt 14. Deinde dic, ſi 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{2}{14}$, ſeu $\frac{1}{7}$; quod toties iteretur, quot ſunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiæ 4, 3, 1, quæ appoſitæ ſunt ipſi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

| | | *Pretia* | | *Differ.* |
|---|---|---|---|---|
| *M* 7 | *A* | 3 | | 2. |
| | *B* | 4 | | 2. |
| | *C* | 6 | | 2. |
| | *D* | 9 | | 4. 3. 1. |
| | | | Summa | 14 |

Si 14 dat lib. 1. quid 2? $\frac{2}{14}$
2? $\frac{2}{14}$
2? $\frac{2}{14}$
8? $\frac{8}{14}$

Summa $\frac{14}{14} = 1$.

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{14}{14} = 1$.

*Demonſtr.* Summa differentiarum, quibus pretia ſtatuta differunt per exceſſum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent ſingulæ differentiæ ſeorſim ſumptæ ad ſingulas partes mixti ſeorſim ſumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot ſunt differentiæ, quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compenſari queat per exceſſum alterius pretii. Quod &c.

Corol. I. Ex ſuperiori exemplo manifeſtum eſt, unumquodque pretium ſaltem ſemel alligari debere, idemque pretium poſſe pluries aſſumi, ut factum eſt cum pretio *D*.

Corol. II. Alligationes hujuſmodi fieri poſſunt variis modis, ſiquidem pretium medium ſemper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diverſa autem alligatione, diverſa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto poſita, ut patet.

## PROPOSITIO VII.

### *De regula ſimplicis Poſitionis, ſeu falſi.*

Ea regula *falſi* dicitur, quæ ex poſitione numeri plerumque falſi docet verum numerum invenire, qui quæſtioni ſatisfaciat. Dicitur *ſimplicis Poſitionis*, ſi ſimplex ponatur numerus, ut in hac Propoſ. fiet; duplicis vero, ſi duo numeri aſſumantur, ut in *Prop. ſeq.*

Regula ſimplicis Poſitionis in tribus conſiſtit, nempe

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad ſolvendam quæſtionem, qui dicitur *Poſitio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis ſit, qualis exquiritur.

3. Inſtituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius teſtamento mandavit, aureos centum di-

diſtribui in tres fratris ſui filios $A$, $B$, $C$ hac lege, ut $A$ habeat partem duplam $B$, & $B$ partem triplam ipſius C. Quæritur quantum ſinguli debeant accipere.

Pone $A$ habere aureos $6$, habebit $B$ aureos $3$, C vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 ſimul efficiant 100 ( nam ſi 100 efficerent, problema eſſet abſolutum ) ſed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falſa poſitione provenit, ut hic 10: ſecundo loco ſtatuitur numerus primo aſſumptus, ſeu Poſitio, ut hic $6$; tertio loco numerus datus in quæſtione, hoc eſt 100, invenies $60$. Itaque $A$ habebit 60 aureos, $B$ 30, C vero 10, quorum ſumma eſt 100, ſcilicet

$$10 . 6 :: 100 . 60 .$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, reſpondit, aureorum meorum $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ faciunt ſummam 470. Quæritur ea ſumma? Patet hic quæri numerum, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ſimul ſumptæ efficiant 470. Ad evitandas fractiones aſſume numerum, qui contineat partes in quæſtione expreſſas. Eſto hic 60, cujus $\frac{1}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{5} = 12$, quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Inſtitue regulam proportionum, diſpoſitis terminis modo ſuperius explicato, nimirum

$$47 . 60 :: 470 . 600 .$$

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum $\frac{1}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{5} = 120$, quæ partes ſimul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima ſingulis horis molit tritici modios 7, ſecunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici

modii 360, omnibus illis molis ſimul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, ſecunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes ſunt modii 100, debebant autem eſſe 360. Inſtituatur ergo regula proportionis: ſi modii 100 poſcunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

$$100 . 5 :: 360 . 18.$$

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, ſecunda 108, tertia 72, quarta 54, qui ſimul additi efficiunt modios 360.

*Demonſt.* Ut ſe habet (in primo exemplo) 10 ad 6 + 3 + 1 ſimul ſumptos in falſa poſitione, ita ſe habet in vera poſitione 100 ad 60 + 30 + 10 ſimul ſumptos. Proinde regula ſtat in hoc ut numerus falſus 10, productus per numerum falſum 6, ita ſe habeat per regulam auream ad ipſum numerum falſum 6, ſicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

## PROPOSITIO VIII.

### *De Regula duplicis Poſitionis.*

Regula *duplicis Poſitionis* non unum, ſed duos ſupponit numeros, ut in *Propoſ. præc.* dictum eſt, ſolvitque plures quæſtiones, quæ per unam poſitionem reſolvi nequeunt. Omnes tamen quæſtiones, quæ per unam poſitionem ſolvuntur, etiam per duas ſolvi poſſunt. Quando autem duplici poſitione opus ſit, indicabitur inferius in *Schol.* En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæſito quemcunque numerum, qui dicitur *Poſitio*, & cum eo procede juxta tenorem quæſtionis; cui ſi non ſatisfaciat, errorem (hoc

( hoc eſt exceſſum, vel defectum, quo poſitio aberrat a numero quæſito ) ſubſcribe eidem poſitioni, cum ſigno +, vel —, quorum unum plus, ſive exceſſum, alterum minus, ſeu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priore major, vel minor, cum quo ſimiliter examinetur quæſtio propoſita, cui ſi non ſatisfaciat, errorem pariter ei poſitioni ſubſcribe cum ſignis +, vel —. Cum ambo errores ſunt per exceſſum, vel ambo per defectum, dicuntur *ſimiles*. Cum autem unus eſt per exceſſum, alter per defectum, hoc eſt cum ſignis diverſis + & —, dicuntur errores *diſſimiles*.

3. Si errores ſunt ſimiles, ducatur prima poſitio in errorem poſitionis ſecundæ, & viciſſim poſitio ſecunda in errorem primæ poſitionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæſitus.

4. Si errores ſunt diſſimiles, productorum ſumma dividitur per ſummam errorum, quotus dat quæſitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati ſunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*; *C* tantundem quantum *B*, & inſuper 10, quæritur lucrum ſingulorum.

Pone lucrum *A* fuiſſe 4, lucrum *B* erit 9, *C* vero 19. Adde ſimul 4, 9, 19, fiunt 32, at debebant eſſe 47, eſt ergo error, ſeu defectus in 15.

Rurſus pone lucrum *A* fuiſſe 7, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui ſimul faciunt 41, quæ ſumma deficit a vera 47 per defectum 6.

Cum itaque duo errores ſimiles ſint ( nempe ambo per defectum ) duc poſitionem 4 in errorem ſecundæ poſitionis, hoc eſt in 6, & poſitionem 7 in errorem 15; fiunt duo producta 24 & 105, quorum differentia eſt 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, ideſt per 9, ( ſubtrahendo errorem 6 ex alio errore 15 ) quotus 9 dat numerum quæſitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum 9, *B* vero 14, & *C* 24, quorum ſumma eſt 47.

*Poſit.* 4, *Err.* — 15 ( 9. *diff.*
*Poſit.* 7, *Err.* — 6 (

*Prod.* 4 × 6 = 24
7 × 15 = 105

*Differ.* 81.

II. Si utraque poſitio ſit excedens, praxis eſt omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuiſſe 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum ſumma eſt 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum ſumma 53 adhuc peccat per exceſſum 6. Cum igitur errores ſimiles ſint (nempe per exceſſum) duc poſitionem 12 in errorem 6 alterius poſitionis, & poſitionem 11 in errorem 9. Tum ſubtrahe productum minus 72 ex majori producto 99, & reſiduum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc eſt per 3, quotus 9 dat numerum quæſitum, ut prius.

*Poſit.* 12, *Err.* + 9 ( 3 *diff.*
*Poſit.* 11, *Err.* + 6 (

*Prod.* 6 × 12 = 72
9 × 11 = 99

*Differ.* 27

III. Quod ſi una poſitio ſit excedens, altera deficiens, ſumma productorum dividitur per ſummam errorum, ut dictum eſt ſupra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuiſſe 5, lucrum *B* erit 10, & lu-

lucrum *C* 20, quorum ſumma 35 deficit a ſumma data 47 per defectum 12; ſumendus eſt igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, ſumma omnium 53 excedit veram ſummam 47 in 6. Ducatur jam poſitio prima 5 in errorem 6, & viciſſim poſitio 11 in errorem 12. Deinde quia errores ſunt diſſimiles, addantur duo producta 30 & 132, eorumque ſumma 162 dividatur per ſummam errorum 18, quotus 9 dat rurſus numerum quæſitum, ut antea.

*Poſit.* 5, *Err.*—12( 18 *ſumma*
*Poſit.* 11, *Err.* + 6(

*Prod.* $5 \times 6 = 30$
$11 \times 12 = 132$

*Summa* 162

*Sit alïud exemplum*. Interrogatus Pythagoras de numero ſuorum diſcipulorum, reſpondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philoſophiæ, ſeptimam partem ſervare ſilentium; inſuper tres alios ſe habere inſtituendos. Quæritur eorum diſcipulorum numerus.

Ponatur diſcipulos habuiſſe 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, ſeptima pars 8, quorum ſumma eſt 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent eſſe 56; eſt error per defectum 3, quem nota juxta ipſam poſitionem 56.

Rurſus ponatur diſcipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, ſeptima 16, quæ ſimul efficiunt 100, additiſque 3, fiunt diſcipuli 103. Eſt ergo iterum per defectum 9, quem nota ad poſitionem 112.

Jam

Jam duc poſitionem primam 56 in errorem ſecundæ poſitionis, hoc eſt in 9, & viciſſim poſitionem ſecundam 112 in alterius poſitionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores ſimiles ſint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum 6; quotus 28 dat numerum quæſitum diſcipulorum. Nam ejus dimidium eſt 14, quarta pars 7, ſeptima 4, quæ ſimul faciunt 25, additiſque 3, habetur numerus 28.

*Poſit.* 56, *Err.*—3 (
*Poſit.* 112, *Err*—9 ( 6 *diff.*

*Prod.* 56 × 9 = 504
112 × 3 = 336

*Differ.* 168.

Poſtremo ſunt tres numeri ignoti $a$, $b$, $c$, qui ſumpti bini dant ſummam, ut ſequitur

$$a + b = 50$$
$$b + c = 70$$
$$a + c = 60$$

Quæritur ſingulorum valor. Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc eſt 52. Sed eſſe debebat 60; ergo poſitio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc eſt $= 56$, ſed debebat eſſe 60; eſt ergo rurſus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut ſupra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$, $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, ſeu 60, quod quærebatur.

Schol. *Indicium autem quando quæſtio propoſita ſolvi non*

*non poſſit per unam poſitionem, ſed duplicem omnino requirat, eſt cum quaeſtioni aliquis determinatus numerus additus eſt, qui una cum numero ad libitum poſito debet aſſumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, & 10, qui adduntur numero ad libitum poſito, indicio ſunt duplici poſitione opus eſſe. In ſecundo autem exemplo numerus ille determinatus diſcipulorum 3 non importat duplicem poſitionem, quia non afficit partes aliquotas* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ *numeri quaeſiti, unde quaeſtio illa etiam per ſimplicem poſitionem ſolvi poteſt. Quaeritur enim numerus, ex quo ſi auferantur* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ *reſiduum ſit 3. Ponatur idem numerus 56, qui prius, erit* $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = 6$, *quod reſiduum debebat eſſe 3. Dicatur ergo ſi reſiduum 6 provenit ex 56, unde 3? Prodibit quartus proportionalis 28, qui quaeſtionem ſolvit, ut antea.*

## PROPOSITIO IX.

*Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.*

Vitruvius *lib. 9. Cap. 3.* refert, ab Archimede deprehenſam fuiſſe fraudem, quam artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat; ſed quo præciſe artificio id egerit, non ſatis conſtat. Duas tamen maſſas feciſſe dicitur, alteram ex auro pro ejuſdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejuſdem: tum hæc tria in vas aqua plenum ſeorſim immittens, aquam inde effluentem ſedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronæ pondus fuiſſe lib. 12, item auri, & argenti maſſas; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxiſſe aquæ libras $7\frac{4}{5}$, dum autem immergeretur auri maſſa, effluxiſſe aquæ li-

libras $7\frac{1}{5}$, immerſa demum argenti maſſa, efﬂuxiſſe aquæ libras $10\frac{4}{5}$. Jam ex regula duplicis poſitionis ponatur, in ea corona fuiſſe auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, ſi puri auri lib. 12 dant aquæ libras $7\frac{1}{5}$, quid lib. 9? invenies lib. $5\frac{2}{5}$. Item, ſi puri argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 3? proveniunt lib. $2\frac{7}{10}$. Adde ſimul libras $5\frac{2}{5}$, & $2\frac{7}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem eſſe lib. $7\frac{4}{5}$; eſt ergo error per exceſſum $\frac{3}{10}$, qui notetur cum ſigno + una cum poſitione aſſumpta 9.

Ponatur ſecundo in eadem corona fuiſſe auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, ſi auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{4}{5}$. Similiter, ſi argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{3}{5}$. Adde ſimul lib. $4\frac{4}{5}$, & $3\frac{3}{5}$, fit ſumma librarum aquæ $8\frac{2}{5}$, debebant autem eſſe lib. $7\frac{4}{5}$ Peccatum eſt igitur rurſus per exceſſum $\frac{3}{5}$, ſeu $\frac{6}{10}$, qui notetur cum + juxta poſitionem 8, ut ſequitur

*Poſit.* 9, *Err.* + $\frac{3}{10}$ ( $\frac{3}{10}$ *differ.*
*Poſit.* 8, *Err.* + $\frac{6}{10}$ (

*Prod.* $9 \times \frac{5}{10} = \frac{54}{10}$
$8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10}$

*Differ.* $\frac{30}{10} = 3$

Ductis jam $9 \times \frac{6}{10}$, & $8 \times \frac{3}{10}$ habentur $\frac{54}{10}$, & $\frac{24}{10}$; quorum differentiam $\frac{30}{10}$, ſeu 3, divide per differentiam errorum, hoc eſt per $\frac{3}{10}$, quotus $\frac{30}{3}$, ſeu 10, dat auri libras quæſitas. Erant ergo immixtæ 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, ſi auri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 10? invenies lib. 6. Item ſi argen-

genti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 2? invenies lib. $1\frac{4}{5}$. Adde igitur 6, & $1\frac{4}{5}$, ſumma librarum $7\frac{4}{5}$ dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. *Sed nota non opus fuiſſe Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujuſmodi facere velit, conficere auri, vel argenti maſſas ejuſdem ponderis cum corona; ſed ſatis eſſe aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis aſſumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.*

Schol. II. *Per regulam duplicis poſitionis aliæ plures quæſtiones pulcherrimæ ſolvi poſſunt, quæ tamen longe facilius, & univerſali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propoſitionis hujus ſimplex, ac genuina demonſtratio; ut videre eſt apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis ann. 1704 edit. Pariſ. pag. 358. Demonſtrationes autem aliunde petitæ prolixæ ſunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.*

## PROPOSITIO X.

*Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire.*

Duc ſecundum in ſeipſum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæſitus. Dati ſint 2 & 8, quibus tertius proportionalis inquiritur. Ducatur 8 × 8, & productum 64 dividatur per 2, quotus 32 eſt numerus quæſitus. Sic 2. 8, 32, ſunt in eadem proportione ſubquadrupla. Ratio patet *ex* 1. *lem.*

Schol. *Si numeri dati ſint inter ſe primi, hoc eſt unus non ſit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, ſed fractus. Sic datis* 2 *&* 5 *in-*

5 *invenitur* per hanc Prop. *tertius proportionalis* $\frac{25}{2}$, *hoc eſt* 12 $\frac{1}{2}$.

## PROPOSITIO XI.

*Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.*

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita ſe habet ad alterum datum, ſicut alter datorum ad ipſum; ita ut numeri dati ſint extremi, & ipſe medius; qui bis ſumitur, ſemel ut conſequens reſpectu primi, & ſemel ut antecedens reſpectu alterius.

Dati ſint numeri 4 & 16, & inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter ſe, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic 4 $\times$ 16 = 64, cujus radix quadrata eſt 8 *per Propoſ.* 2. *Cap.* 5. Sunt igitur 4, 8, 16 continue proportionales, nam 4 . 8 :: 8 . 16. Ratio patet *ex* 1. *lem.*

Schol. I. *Si productum ex numeris datis non ſit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non poſſit ſine reſiduo; tunc medius proportionalis inveniri nullo modo poteſt. Nam dati numeri ſint v. g.* 2 *&* 5, *radix quadrata* per Prop. cit. *&* Schol. 2. *erit* 3 $\frac{1}{6}$. *Adeoque erunt in continua proportione* 2, 3 $\frac{1}{6}$, 5, *quod eſt falſum, nam ſi reducantur ad idem nomen, erunt* $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$, *ſeu* 12, 19, 30, *qui nullo modo ſunt proportionales, ut patet.*

Schol. II. *Cum omne quadratum intelligi poſſit multiplicatum eſſe per unitatem, hinc omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipſum quadratum. Sic* 25, *radix quadrata numeri* 625, *eſt media proportionalis inter* 1 *&* 625, *proinde* 1, 25,

625

*625 ſunt in eadem ratione continua* . *Nam* 1 . 25 :: 25 . 625 .

## PROPOSITIO XII.

*Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire* .

Quadratum unius extremi ducatur in alterum extremum , & ex producto extrahatur radix cubica *per Prop.* 3. *Cap.* 5. , quæ erit duorum mediorum proportionalium prior. Deinde quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum , & ex producto pariter extrahatur radix cubica , quæ erit duorum mediorum proportionalium poſterior.

Dati ſint numeri 2 & 16 , quos inter invenire oporteat duos medios proportionales . Quadra minorem numerum 2 , ejuſque quadratum 4 duc in 16, fiunt 64 , cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium. Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256 , duc in 2 , fiunt 512 , cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium poſterior; proinde 2, 4, 8, 16 ſunt in continua proportione, ut patet, cum ſit 2 ad 4, ut 4 ad 8 , & 4 ad 8 , ut 8 ad 16.

Schol. *Si ad numerum datum* , & *primum medium proportionalem inventum* , *quæratur tertius proportionalis* per Propoſ. 10. hujus; *vel ſi inter medium proportionalem inventum* , & *alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis* per Propoſ. 11. hujus ; *in utroque caſu obtinebitur ſecundus duorum mediorum proportionalium quæſitus* . *Ceterum ſi numeri dati ſint tales* , *ut inde radix cubica obtineri non poſſit ſine fractionibus* , *tunc medii proportionales inveniri nequeunt* , *ut de uno medio proportionali dictum eſt* in Schol. 1. Propoſ. præc.

PRO-

## PROPOSITIO XIII.

*Quæſtiones aliquot practicæ expediuntur.*

Etſi quæſtiones fere omnes, quæ ſequuntur, ex regulis proportionum jam explicatis facile reſolvi poſſint; quia tamen eas ordinare, atque expedire tironibus negotium faceſſit, adeoque Arithmetici practici peculiares de his tractatus inſtituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipſa praxi operandi etiam methodus innoteſcat.

1. Marcellus debet Titio ſcuta Romana 3432. Cedit illi domum, quæ locari ſolet annuis ſcutis $53\frac{2}{3}$, poſſidendam, donec debitum ſit omnino ſolutum, quæritur quot annis eam Titius poſſidebit.

Dividantur ſc. 3432 per ſc. $53\frac{2}{3}$ (redactis integris cum fractione ad fractionem ejuſdem nominis) invenientur anni 63, menſes 11, dies 12, quod per ſe manifeſtum eſt.

2. Impendit Paulus ſcuta Romana 415. 35 in libras 385 mercis cujuſdam coemendas, unde lucrari cupit ſcuta 50. 50, quæritur quanti ſingulas libras vendere debeat.

Addantur ſimul emtæ mercis pretium, & lucrum inde faciendum, nempe 415. 35 + 50. 50 = 466. 85, quæ quidem ſumma dividatur per numerum librarum 385, quotus dat unius libræ pretium, ſcilicet ſc. 1. 21.

3. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex ſingulis 100 lucratus ſit?

Dic per regulam proportionum ſi 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex ſingulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel ſic, ſubtrahe 8400 ex 9072, differentia, ſeu lu-

lucrum eſt aureorum 672. Dic ergo, ſi 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

*Examen* fit, ſi dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

4. Fingamus ab eodem Lucilio ſolvendam eſſe penſionem ſcutorum 500 annis quinque, hoc eſt ſcuta 100 ſingulis annis; quam ille emit parata pecunia, ſolutis ſtatim ſcutis 400. Quæritur, quantum lucri ex ſingulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream, ſi ſcuta 400 fiunt 500, ſeu *per Prop.* 4. *hujus*, ſi 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex ſingulis 100 habet lucrum ſcutorum 25.

*Examen* erit, ſi dicas, 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

Schol. I. *Quæſtiones hujus generis pertinent ad regulas lucri, ſeu* ſimplicis meriti, *ut vocant.*

5. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus ſolvendos, hoc eſt ſingulis annis aureos 220. Paratus tamen eſt ſtatim aureos 660 creditori ſolvere, ſiquidem 10 ex ſingulis 100 ſibi relaxet. Quæritur, quot aureos ſolvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 200 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot ſcilicet anni ſunt) dic ſi 110 fiunt 100, vel (*per Prop.* 4. *hujus*) ſi 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rurſus dic, ſi 11 fiunt 10, quid 200? invenies 181 $\frac{9}{11}$. Demum, ſi 11 dant 10, quid 181 $\frac{9}{11}$? proveniunt 165 $\frac{35}{121}$. Addantur ſimul 200, 181 $\frac{9}{11}$, 165 $\frac{35}{121}$. Erit ſumma 547 $\frac{13}{121}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos 547 $\frac{13}{121}$.

Schol. II. *Nota in hac aliiſque hujus generis quæſtionibus dici non poſſe, ſi* 100 *fiunt* 90, *quid* 220? *Sed neceſſario addi debere lucrum ipſum* 10 *ad* 100. *Nam nihil aliud proponitur relaxandum, niſi lucrum; proinde lucrum ipſum additur ad ſortem, ſeu* 100, ut

H

*ut habeatur* 110 , *primus regulæ aureæ terminus*.

6. Eadem ratione ſi quis ad tres annos domum conduxerit cum annua penſione ſcutorum 300 ; domino autem ejus domus omnem ſtatim ſummam in anteceſſum ſolvat ea conditione, ut ſibi ſcuta 5 pro ſingulis 100 compenſet : dices, ſi 105 fiunt 100, ſeu ( dividendo 105 , & 100 per 5 ) ſi 21 fiunt 20, quid 300? invenies $285\frac{5}{7}$. Rurſus , ſi 21 fiunt 20, quid $285\frac{5}{7}$? fiunt 272. $\frac{16}{147}$. Demum ſi 21 dant 20, quid $272\frac{16}{147}$? proveniunt $259\frac{467}{3087}$. Horum ſumma $816\frac{97}{100}$ ( redactis fractionibus in partes centeſimas ) in anteceſſum domus illius domino ſolvenda eſt.

Quod ſi aurei illi 660 a Fabio triennio poſt ſolvendi ſint; tunc additis, ut ſupra 10 ad 100, dic ſi 110 fiunt 100, ſeu, *per Prop.* 4. *hujus* , ſi 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rurſus , ſi 11 fiunt 10, quid 600? invenies $545\frac{5}{11}$. Demum , ſi 11 fiunt 10 , quid $545\frac{5}{11}$? Fiunt $495\frac{105}{121}$ ; & hi ſolum Sempronio ſolvendi ſunt.

Vel brevius, duc 660 in $10 \times 10 \times 10 = 1000$, & productum 660000 , divide per $11 \times 11 \times 11 = 1331$ , quotus dat $495\frac{105}{121}$, ut antea.

Schol. III. *Hæc praxis vulgo dicitur* , ſcontare a capo d' anno.

7. Accepit Cajus aureos 500 cum uſura aureorum 10 ex ſingulis 100 in annum ea lege, ut niſi ſolvat ſingulis annis , fiat ex fœnore auctio ſortis . Nihil fuit a Cajo ſolutum toto triennio. Quæritur, quantum ipſe pro ſorte , atque uſuræ uſura fœneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110 ; deinde per regulam auream dic, ſi aurei 100 fiunt 110 , ſeu ſi 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc eſt 500 pro ſorte, pro uſura vero primi anni 50. Rurſus pro ſecundo anno dic, ſi 10 fiunt 11 , quid 550? fiunt 605. Demum ſi 10 dant 11 , quid 605 ? Invenies ſummam a Ca-

a Cajo ſolvendam aureos 665 $\frac{1}{2}$.

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc eſt in 11 × 11 × 11 = 1331, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per 10 × 10 × 10 = 1000, quotus dat 665 $\frac{1}{2}$, ut antea.

Coroll. Hinc liquet, ſortem datam, nempe aureos 500, & ſummas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & 665 $\frac{1}{2}$ eſſe terminos continue proportionales, cum omnes ſint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11, proinde inter ſortem datam, & ultimi termini ſummam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni uno minus. Hoc ipſum de præcedenti quæſtione debet intelligi.

Schol. IV. *Praxis hujuſmodi, quæ apud Latinos anatociſmus, ſive uſura uſuræ, & a nonnullis uſura Judaica dicitur, eſt a lege vetita. Ab Italis vocari ſolet meritum meriti, ſeu* meritare a capo d' anno. *Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri, ac multiplicari debet.*

8. Terentius debet Gellio pro uſura primi anni ſummam ſortis & fœnoris ſimul ſcuta 4608, pro quarto autem anno ſcuta 6561; quæritur, quanta fuerit ſors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, *per Prop.* 12. *hujus*: duc ſcilicet minorem 4608, in ſe, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc autem extrahatur radix cubica, *per Prop.* 3. *Cap.* 5. prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, *per Prop.* 12. *cit* Solvet igitur ſecundo anno pro ſorte, ac fœnore ſcuta 5184: atque hinc deducitur ſortis quæſita quantitas. Nam *ex præc. Corol.* ſortis ſumma, & reliquæ omnes, ſunt inter ſe in proportione continua; proinde ſecundi anni ſumma 5184 ſe habet ad ſummam 4608 primi anni,

ſicuti hæc ad ſortem quæſitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæratur tertius proportionalis per *Propoſ.* 10. *hujus*, erit ſors quæſita 4096. Hanc vero ſubtrahe ex ſumma data ſortis & fœnoris primi anni, nempe ex 4608, innoteſcet ejuſdem ſortis uſura, ſcutorum ſcilicet 512, ſeu $12\frac{1}{2}$ ex ſingulis 100. Nam dic, ſi ſcuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies $112\frac{1}{2}$, hoc ex $12\frac{1}{2}$ ex ſingulis centenis.

## CAPUT VII.

### *De Progreſſionibus Arithmeticis, & Geometricis, eorumque regulis.*

Progreſſio eſt complurium terminorum eadem ratione procedentium ſeries. Si exceſſus, vel defectus, quo termini illi procedunt, ſit æqualis, ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui binario creſcunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, &c qui ternario creſcunt, tunc oritur *progreſſio Arithmetica*. Si vero termini ſint in continua ratione Geometrica proportionales eo modo, quo in præcedenti capite explicatum eſt, tunc habetur *progreſſio Geometrica*. De utraque hic breviter agemus.

Datur etiam proportio Harmonica, ſeu Muſica, in qua tres termini ita ordinantur, ut eadem ſit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentia medii & minimi. Tales ſunt numeri 3, 4, 6. Nam inter 6 & 3 eſt proportio dupla, ſicuti dupla eſt proportio differentiæ inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1, ſcilicet $6 . 3 :: 6 - 4 . 4 - 3$.

Regulæ progreſſionum hujuſmodi conſiſtunt in hoc, ut

ut eorum terminorum ſeries compendioſe, & ſine prolixæ calculationis tædio in unam ſummam colligantur.

## LEMMATA.

I. In progreſſione Arithmetica terminorum quorumcunque, ſumma duorum extremorum æquatur ſummæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter diſtant. Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Erit $1 + 11 = 3, 9$. Item $1 + 11 = 5 + 7$.

II. In progreſſione Arithmetica terminorum imparium ſumma extremorum, vel duorum terminorum æqualiter diſtantium, dupla eſt termini medii.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.$$

In hac progreſſione ſeptem terminorum ſumma $1 + 13 = 7 + 7$, ſeu 14. Item $3 + 11 = 14$, pariter $5 + 9 = 14$.

III. In omni progreſſione Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc eſt minimum terminum, & toties exceſſum, ſeu differentiam una minus, quot ſunt termini poſt primum uſque ad ipſum incluſive. Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Terminus quartus progreſſionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progreſſionis, continet 1, & quater differentiam ipſam 2. Ita quoque 11, terminus progreſſionis ſextus, continet 1, & quinquies differentiam 2, ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progreſſionis terminus, ſi differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præc. progreſſione, ſi differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.

## PROPOSITIO I.

*Datis minimo ac maximo progreſſionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire ſummam.*

Regula hæc eſt: ſumma minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit ſummam totius progreſſionis.

*Sit exemplum.* Quæritur ſumma omnium campanæ pulſuum alicujus horologii, quod ab 1 hora uſque ad 12 incluſive, det pulſus pro horis juxta naturalem numerorum ſeriem 1, 2, 3, 4, 5 &c., ita ut pro hora 7 ſepties, pro hora 10 decies, pro 12 duodecies pulſet. Minimus terminus eſt 1, & maximus 12; horum ſumma 13 ducatur in 6, (dimidium terminorum) productum 78 dat omnes campanæ horariæ pulſus pro horis 12. Cujus duplum dat pulſus horarios integri unius diei.

Ratio deducitur *ex lemm.* 1. Nam cum ſumma extremorum æqualis ſit duobus quibuſque terminis æqualiter diſtantibus, rectangulum factum ex ſumma primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, neceſſario æquale erit ſummæ totius progreſſionis. Multiplicatio enim eſt idem ac compendioſa additio ex dictis *Prop.* 5. *Cap.* 1.

Coroll. Hinc infertur, ſummam progreſſionis Arithmeticæ pariter haberi. 1. Si dimidium ſummæ ma-

maximi ac minimi termini ducatur in numerum terminorum. 2. Si ſumma maximi & minimi ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progreſſione terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio ſummæ maximi ac minimi *ex lemm.* 2. hinc ſequitur, haberi progreſſionis ſummam, ſi numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium.

## PROPOSITIO II.

*Datis terminis maximo, & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.*

A Maximo termino aufer minimum, & reſiduum divide per numerum terminorum unitate minutum, quotus dabit differentiam quæſitam.

In præc. exemplo campanæ horariæ a maximo termino 12 aufer minimum 1, & reſiduum 11 divide per numerum terminorum unitate minutum, nempe 11; quotus 1 dat differentiam quæſitam.

Ratio deſumitur *ex lemm.* 3. Nam 12 continet minimum terminum 1, & præterea toties continet differentiam, quot ſunt poſt terminum 1 uſque ad ipſum incluſive 12 termini, qui nimirum ſunt 11: proinde, ablato minimo termino, reſiduum continet toties differentiam, quot ſunt progreſſionis termini minus uno; adeoque diviſo reſiduo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia.

## PROPOSITIO III.

*Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.*

Duc differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, ſumma dabit maximum.

*Sit exemplum*. Dux exercitus diſtribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 ſtrenuos milites, qui primi arcem occuparunt; hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia ſuperavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & ſic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum eſſe 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium ſcilicet primi militis. Ratio patet *ex lemm. 3., ejuſque Coroll.*

## PROPOSITIO IV.

*Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.*

A maximo aufer minimum, & reſiduum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

*Sit exemplum*. Emta eſt multitudo librorum hac conventione, ut minimus liber ſtet juliis 2, ſecundus juliis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum numerus. Aufer minimum 2 a maximo 400, & reſiduum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc eſt 200, eſt numerus terminorum, ſeu librorum, qui quæritur. Si-

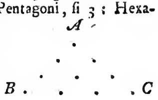
Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die ſolvantur ſibi aſſes 20, ſecundo die aſſes 25, tertio aſſes 30, & ſic deinceps. Ultimo die, quo opus abſolvit, accepit aſſes 165, quæritur quot dies operi inſumpſerit. Aufer terminum minimum 20 a maximo 165, & reſiduum 145 divide per differentiam 5, quotus eſt 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propoſitionis deſumitur ex *lemm.* 3., ut manifeſtum eſt.

## PROPOSITIO V.

### *De Numeris Polygonis.*

*Numeri Polygoni* ſunt ſummæ progreſſionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in ſpecie Triangulares, ſi differentia progreſſionis ſit 1: Quadrati, ſi differentia ſit 2: Pentagoni, ſi 3: Hexagoni, ſi 4: Heptagoni, ſi 5 &c. ſortiuntur autem hæc nomina a figuris Geometricis in quas diſponi poſſunt per puncta unitatibus reſpondentia, ut ex Triangulari *ABC* patet.




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Progr. Arithm.* | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
| *Num. Triangulares.* | 1. | 3. | 6. | 10. | 15. | 21. | 28. |
| *Progr. Arithm.* | 1. | 3. | 5. | 7. | 9. | 11. | 13. |
| *Num. Quadrati.* | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. | 49. |
| *Progr. Arithm.* | 1. | 4. | 7. | 10. | 13. | 16. | 19. |
| *Num. Pentagoni.* | 1. | 5. | 12. | 22. | 35. | 51. | 70. |
| *Progr. Arithm.* | 1. | 5. | 9. | 13. | 17. | 21. | 25. |
| *Num. Hexagoni.* | 1. | 6. | 15. | 28. | 45. | 66. | 91. |

*Latus Polygoni* eſt numerus terminorum progreſſionis

nis Arithmeticæ, qui ſummantur, quod quidem tot continet unitates, quot numerus ipſe polygonus terminos. Sic latus *BC* polygoni triangularis *ABC* continet unitates 4, & polygonus numerus 10 ſummam quatuor terminorum $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

*Numerus angulorum* eſt, qui indicat quot angulos, ſeu latera habeat talis in ſpecie polygonus, ex quorum numero determinatur. Sic numerus angulorum in Triangularibus eſt 3, in Tetragonis 4, in Pentagonis 5 &c. Numerus vero angulorum ſuperat ſemper duplici unitate differentiam progreſſionis generatricis, quod notetur. Ex his facile eſt ſolvere problemata, quæ ſequuntur.

1. Dato latere, & numero angulorum numerum polygonum invenire. Nam eſto datum latus 4, & angulorum numerus 3. Jam patet, addendos eſſe quatuor terminos, cum latus datum unitates quatuor contineat progreſſionis Arithmeticæ, cujus differentia eſt 1. Nam angulorum numerus $3 - 2$, dat differentiam 1. Erunt ergo termini addendi $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, qui erit numerus triangularis quæſitus. Sit exemplum, diſponere volo in viridario aliquot flores, ſive arbores, in forma triangulari, ita ut in uno latere ſint arbores 4, quæritur eorum numerus: patet 10. requiri.

2. Dato numero polygono, & angulorum numero, polygoni latus invenire. Sit polygonus datus 51, & angulorum numerus 5. Ex dictis conſtat differentiam ſeriei generatricis eſſe 3, adeoque polygonum datum 51 eſſe Pentagonum, cui in prima ſerie numerorum naturalium reſpondet latus 6. Quod manifeſtum eſt, ſi ejuſdem ſeriei, cujus differentia eſt 3, termini 6 ſummentur.

Schol. *Si addantur ſimul numeri polygoni, nempe Triangulares, aut Quadrati, aut Pentagoni &c. ſumma dat numeros Pyramidales, qui ſi oriantur ex addi-*

*ditione Triangularium, vocantur Pyramidales Triangulares. Si ex additione quadratorum, Pyramidales Quadrati. Sic ſi addas ſimul Hexagonos* 1, 6, 15, 28, 45, 66 *&c. invenies numeros Pyramidales Hexagonos* 1, 7, 22, 50, 95, 161 *&c. & ſic de aliis.*

*De progreſſionibus Geometricis.*

## LEMMA IV.

In omni progreſſione Geometrica ſi terminus quilibet in ſe ducatur, & productum dividatur per terminum primum progreſſionis, quotus diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipſe terminus.

In progreſſione *A* terminus 8 tertio loco poſitus, qui duobus locis diſtat a primo, ducatur in ſe, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, ſeu quatuor. Nam terminus 32 eſt tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propoſ.* 10. *Cap.* 6. proinde 32 toties continet 8 (hoc eſt bis terminum intermedium 16) quoties 8 continet primum 2, nempe

*A* 2, 4, 8, 16, 32, *&c.*
0. 1. 2. 3. 4.

bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantundem diſtet ab ipſo 8, quantum 8 a termino primo 2 (duobus ſcilicet locis) diſtabit ipſe 32 a primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

Coroll. Hinc ſequitur, quod ſi cuilibet progreſſioni Geometricæ ſubſcribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio a cifra, quilibet progreſſionis terminus, qui producitur per alium in ſe du-

ductum, & diviſum a primo, habeat ſub ſe notam duplo majorem, quam terminus a quo producitur. Sic in ſuperiori exemplo terminus 32 habet ſub ſe notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, *vel indices* progreſſionis dicuntur, indicant, quantum quiſque terminus diſtet a primo: Locum autem, ſeu numerum terminorum progreſſionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index eſt 4, eſt quintus in progreſſione terminus: Quod notetur.

## LEMMA V.

In omni progreſſione geometrica ſi duo quilibet termini in ſe ducantur, & productum dividatur per primum terminum progreſſionis, quotus dabit terminum tot locis diſtantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum ſimul additi.

In Progreſſione Geometrica *B* ſubſcribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum eſt in *præc. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quorum indices ſimul additi dant 4, ducantur inter ſe, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus eſt 80, cujus index pariter eſt 4, adeoque quatuor locis diſtat a primo termino per *Coroll. cit.*

*B* 5, 10, 20, 40, 80, 160 *&c.*
0. 1. 2. 3. 4. 5.

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progreſſionis datæ terminum, v. g. ſextum, multiplicari debent inter ſe duo termini, eorumque productum dividi per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæſitus. Sic ad inveniendum ſextum progreſſionis *B* terminum, ductis inter ſe 20 & 40 (quorum in-

indices additi dant 5 ) & producto diviſo per 5, quotus 160 erit ſextus progreſſionis terminus, ut patet.

## PROPOSITIO VI.

*Datis minimo & maximo progreſſionis Geometricæ terminis, ac denominatore, ſummam terminorum invenire.*

A maximo termino aufer minimum, & reſiduum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum ſummam.

*Sit exemplum*. Venditur equus eximiæ pulchritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in ſoleis ferreis figendis adhiberi ſolent, ſolvatur pro primo clavo 1 aſſis, pro ſecundo clavo 2 aſſes, pro tertio 4, & ſic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat aſſes 2147483648. Quæritur aſſium omnium ſolvendorum ſumma.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & reſiduum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac reſiduum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progreſſionis ſumma 4294967295: qui aſſes ſi dividantur per 100, erit pretium illius equi ſcutorum 42949672, & aſſes 95, *per Schol. Prop.* 5. *Cap.* 3.

Ratio deducitur *ex Prop.* 34. *lib.* 9. *Eucl.* Nam in omni finita progreſſione Geometrica, ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita maximi & minimi differentia ( ſeu maximus terminus, dempto minimo ) eſt ad totam progreſſionis ſummam, minus ipſomet maximo termino; ut ſi fuerit progreſſio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81,

243,

243, erit denominator 3 unitate multatus, ſeu 2 ad 1, ſicuti 243 — 3, ſeu 240, ad totam progreſſionis ſummam, dempto maximo termino, hoc eſt ad 3 + 9 + 27 + 81 = 120; proinde diviſo 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progreſſionis ſumma 363.

Schol. I. *Progreſſionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur ſumma, ſi duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum* 2147483648, *ac deme unitatem, reſiduum dabit ſummam totius progreſſionis* 4294967295, *ut antea. Ratio per ſe manifeſta eſt, quia denominator unitate multatus eſt unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc caſu idem eſt, ac illum bis ſumere, ſeu duplicare.*

Schol. II. *Ex progreſſione dupla ab* 1 *incipiente* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. habentur numeri, qui dicuntur* Perfecti, *qui ſcilicet omnibus ſuis partibus aliquotis æquales ſunt, ut* 6, 28, 496 *&c. hoc pacto: adduntur ordinatim progreſſionis duplæ termini, donec eorum ſumma ſit numerus primus, ut* 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 4 = 7, 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31. *Tum numerus primus* 3, *vel* 7, *vel* 31 *ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic* 3 × 2 = 6, 7 × 4 = 28, 31 × 16 = 496. *Et ſic de aliis, qui pauci ſunt, ſicuti in natura aliæ res, quæ perfectæ dicuntur. Nam intra decem eſt* 6, *intra centum eſt* 28, *intra mille eſt* 496, *intra dena millia* 8128. *Omnes aut ſenario, aut octonario terminantur.*

## PROPOSITIO VII.

*Datis aliquot progreſſionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.*

Dati ſunt aliqui termini Geometricæ progreſſionis *A*,

*A*, & inveniendus ſit ejuſdem terminus v. g. vigeſimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæſiti, *per Coroll. lemm.* 4. Subſcribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cifra, *per Cor. cit.*, & duc 80, qui in progreſſione quintum locum occupat, & diſtat a primo locis 4, in ſe ipſum, ejuſque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipſe 80, hoc eſt locis 8 *per lemm.* 4.

Eadem ratione duc 1280 in ſe ipſum, & productum divide per 5, quotus 327680, diſtabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc eſt 16 *per lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæſiti 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index ſit 4, hoc eſt per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigeſimus quæſitus.

Nam cum ex conſtructione terminus 2621440 ſit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices ſunt 16 & 3, ſeu 19, & diviſus ſit per primum terminum 5, diſtabit tot locis a primo termino, quot unitates habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm.* 5., hoc eſt locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progreſſione vigeſimus *per Coroll. lemm.* 4. Quod erat &c.

Coroll. Patet idem eſſe, quærere datæ progreſſionis terminum 20, ac terminum exponentis, ſeu indicis 19, unitate minoris termino quæſito.

## PROPOSITIO VIII.

*Afferuntur nonnullæ Progreſſionis Geometricæ quæſtiones.*

I. Quæritur, quantum frumenti ex uno tritici gra-

grani haberi poſſit annis 10, ſi ſupponatur ab uno grano produci poſſe ſingulis annis grana 100, licet revera multo plura produci ſoleant.

Illa ergo 100 grana ſecundo anno producent centies centum grana, nempe 10, 000, & ſic deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progreſſionis decimus, ſeu ultimus terminus, qui *per Propoſ. præc.* erit 10000, 0000, 0000, 0000, 0000, hoc eſt unitas cum ciſris 20. A quo ſi auferatur minimus terminus 100, meſſis primi anni, & reſiduum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc eſt per 99, & addatur quoto ultimus terminus ſupra inventus, erit omnium granorum ſumma *per Prop.* 5.

1010101010101010101010100.

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libram unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium ſit pondo librarum 640, requiruntur ad rubium unum grana 4608000; dividatur per hunc progreſſionis ſumma, dabit quotus rubiorum numerum.

2. Rex, cui ex annuo redditu proveniunt ter decies centena millia nummorum argenteorum, ſtatuit ejuſmodi redditus alicui miniſtro locare hoc pacto, ut ſingulis annis per unum menſem ſolvat ſibi primo die aſſem 1, ſecundo die aſſes 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur ſumma ſolvenda regi.

Inveniatur progreſſionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propoſ. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit aſſium ſumma 1073741823, per *Schol.* 1. *Propoſ.* 6. Ex qua reſectis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum ſumma.

3. Sche-

3. Scheramus Indiæ rex propoſuit Seſſæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a ſe inventum illi expoſuerat, ut in præmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola poſitum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuiſſet. Leviſſima regi primum viſa res eſt: ſed facto computo ab Arithmeticis inventum eſt, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551615. Hoc patet ex dictis per *Prop.* 6. & 7. *hujus*.

Schol. I. *Hanc doctrinam qui perceperit, haud mirabitur id, quod ſacra hiſtoria narrat de multitudine filiorum Iſrael, qui egreſſi ſunt de Ægypto. Cum enim eo profecti eſſent non plures, quam* 70, *ita multiplicati ſunt, ut poſt annos* 120, *inde exierint ad ſexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, ſenes, ac mulieres.*

Schol. II. *Admiranda Geometricæ progreſſionis duplæ ab* 1 *incipientis uſque ad terminos* 124 *incluſive incrementa, quot ſcilicet ſcalarum gradibus Romæ ad templum Aracælitanum aſcenditur, proſecutus eſt integro libro Romæ edito an.* 1652. *Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min. Obſerv., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut neſcias, utrum magis Geometricæ progreſſionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.*

Schol. III. *De progreſſione Geometrica infinita per infinitos terminos deſcendente non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici ſtudium tranſcendat, & per Analyſin ea longe facilius explicetur.*

## PROPOSITIO IX.

***Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.***

Combinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo

rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter ſe combinari poſſint; hoc eſt quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri.

1. Datæ ſint igitur octo res, ſeu literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, ſcire volo omnes binorum combinationes. Inſtituantur duæ progreſſiones Arithmeticæ naturales deſcendentes, ſubducta unitate a numeris 8 & 2, tot ſcilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in *A* & *B* factum eſt. Ducantur deinde inter ſe 8 & 7; & productum 56 dividatur per productum 2 × 1, hoc eſt per 2, quotus 28 dat quæſitam binorum multitudinem.

| *A* | *B* |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 1 | 7 |
| 2 | 56 ( 28 |

Hoc patet ex ſequenti 8 literarum combinatione.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ab* | *ac* | *ad* | *ae* | *af* | *ag* | *ah* |
| *bc* | *bd* | *be* | *bf* | *bg* | *bh* | |
| *cd* | *ce* | *cf* | *cg* | *ch* | | |
| *de* | *df* | *dg* | *dh* | | | |
| *ef* | *eg* | *eh* | | | | |
| *fg* | *fh* | | | | | |
| *gh* | | | | | | |

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iiſdem & literis haberi poſſint. Inſtituantur, ut ſupra factum eſt, duæ progreſſiones Arithmeticæ deſcendentes *C* & *D*, & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerum ternorum, qui petitur.

| *C* | *D* |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 2 | 7 |
| 1 | 6 |
| 6 | 336 ( 56 |

Coroll. Eadem methodo inveniuntur omnes quater-

ternarii, quinarii, ſenarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum ſortito extrahantur, binarii *per hanc Propoſ.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinarii 43949268: unde difficillima in hujuſmodi ludis divinandi ratio ſatis apparet.

## PROPOSITIO X.

*Ex dato rerum numero permutationes omnes poſſibiles invenire.*

Permutatio diſtinguitur a combinatione in hoc, quod combinatio, dato rerum numero, oſtendit quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii &c. ex eo rerum numero fieri poſſint, ut ex *Prop. præc.* manifeſtum eſt. Permutatio vero docet, quoties datæ illæ quantitates permutari queant, ita ut ſemper omnes accipiantur, variato ſolum ordine. En regula

Sumantur tot numeri in ſerie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot ſunt res datæ, v. g. quinque literæ, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, productum ex terminis ſeriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæſitus, ut in *A* & *B* patet. Nam ſi dentur duæ tantum literæ *a*, *b*, poſſunt bis permutari, ſi quælibet ſemel primum locum vel ſecundum occupet, *a b*, *b a*. Si vero dentur tres *a*, *b*, *c*, permutari poſſunt ſexies. Quælibet enim occupare poteſt ſemel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum eſt, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, poſſunt duæ reliquæ *a*, *b*, mutari bis, ac proinde habentur duo diverſi ordines *a b c*, *b a c*.

| *A* | *B* |
|---|---|
| 1 | *a* |
| 2 | *b* |
| 3 | *c* |
| 4 | *d* |
| 5 | *e* |
| 120 | |

Rurſus *b* occupante ultimum locum, permutari poſſunt bis duæ *a*, *c*; & ſic duo novi exurgunt ordines *a c b*, *c a b*. Denique ſi *a* teneat ultimum locum, reliquæ duæ *c*, *b* bis permutari queunt, unde rurſus alii duo habentur ordines *b c a*, *c b a*. En ſimul omnes trium literarum *a*, *b*, *c* permutationes.

*a b c*, *a c b*, *b c a*,
*b a c*, *c a b*, *c b a*.

Eodem diſcurſu oſtenditur literas quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, permutationes 24 admittere, literas quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, permutationes 120 &c.

Corol. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

*Tot tibi ſunt Virgo dotes, quot ſydera Cælo.*
octo verbis conſtans, ſubire poſſe permutationes 40320, non tamen ſemper metri ratione ſervata.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, ſeu quot modis, variato ordine diſponi poſſint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus anagrammata ſunt *Amor*, *Mora*, *Marb*, *Ramo*, *Armo*, &c, quæ olim ex depravato ejus ætatis guſtu literatores in deliciis habebant.

## PROPOSITIO XI.

*Proponuntur aliqua Permutationum problemata.*

1. Sunt Convictores 12, qui communi menſa utuntur, & quotidie ſinguli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis abſolvetur iſthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progreſſionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenietur *per Propoſ. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas ſi dividas per

per dies 365 habebis annorum ſummam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia neceſſaria erunt ad omnes ejuſmodi permutationes ſcribendas, etiamſi mille ſcriptores exiſtant, qui quotidie paginas 40 ſcribant, & unaquæque contineat permutationes 50.

Inveniatur *per Propoſ. præc.* permutationum ſumma ex literis 24, quæ ex Tacquet eſt 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 × 50 × 1000, productum 2000000 dat numerum permutationum ſingulis diebus ſcribendum, quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam permutationum ſummam, quotus dabit numerum annorum quæſitum.

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, ſeu chori ſunt 9: quilibet chorus continet *6666* legiones, & legio quælibet Angelos *6666*, proinde omnium Angelorum numerus eſt 399, 920, 004; quæritur quot fieri poſſint Angelorum permutationes, ſeu quot modis ordinem inter ſe variare queant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

## PROPOSITIO XII.

*Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.*

1. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in ſecundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet ſecundus Harmonicus.

3. Denique ſecundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

*Sit exempl.* Proportio Arithmetica 2, 3, 4, efficit

cit Harmonicam . . . . . . . . . 6, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica 3, 7, 11, efficit Harmonicam . . . . . . . . . 21, 33, 77.

## PROPOSITIO XIII.

*Datis duobus numeris tertium Harmonico proportionalem invenire.*

Duc primum numerum datum in ſecundum, & productum divide per duplum primi minutum ſecundo, hoc eſt per differentiam dupli primi a ſecundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati ſint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3 × 4, & productum 12 divide per 6 — 4, hoc eſt per 2, quotus 6 dat numerum quæſitum. Similiter dati ſint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6 × 8, & productum 48 divide per 12 — 8, ſeu 4, quotus 12 eſt tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

Quod ſi primi termini duplum ſit æquale, vel minus ſecundo termino, tunc tertius harmonice proportionalis inveniri non poterit; ut ſi dentur, 3 & 6, vel 2 & 6.

## PROPOSITIO XIV.

*Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.*

Datus ſit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos eſſe in proportione harmonica manifeſtum eſt. Nam

60.

60 . 20 :: 60 — 30 . 30 — 20.
30 . 15 :: 30 — 20 . 20 — 15.
20 . 12 :: 20 — 15 . 15 — 12.
15 . 10 :: 15 — 12 . 12 — 10.

Hinc patet haberi progreſſionem terminorum harmonice proportionalium.

Schol. I. *Harum trium propoſitionum demonſtrationes ad Analyſin ſpecioſam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam ſyntheticam ſunt operoſæ.*

Schol. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, ſeu Muſicam conſtituere dicantur, eſt nimirum, quia conſonantias Muſicas conſtituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus* 3, 4, 6 *inter* 6 *&* 4 *eſt proportio ſeſquialtera, conſtituens conſonantiam, quæ* Diapente, *ſeu* Quinta *dicitur. Item inter* 4 *&* 3 *eſt proportio ſeſquitertia, conſtituens conſonantiam, quam* Diateſſeron, *ſeu* Quartam *vocant. Deinde inter extremos* 6 *&* 3 *habetur proportio dupla, quæ* Diapaſon, *ſeu* Octavam *conſonantiam efficit.*

Schol. III. *Datur etiam proportio* Contr-harmonica, *quæ habetur cum datis tribus terminis, differentia primi, & ſecundi eſt ad differentiam ſecundi & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic* 3, 5, 6 *ſunt numeri contrharmonice proportionales: nam* 2, *differentia primi & ſecundi termini, eſt ad* 1, *differentiam ſecundi & tertii, ut* 6 *ad* 3. *Item* 12, 10, 6 *ſunt contrharmonice proportionales; nam* 2 . 4 :: 6 . 12. *Hæc dicta ſint in gratiam eorum, qui muſicam amant, aut inſtrumentis Muſicis ſtudent, ut hinc numerorum ſcientiam ſibi maxime neceſſariam intelligant.*

## CAPUT VIII.

### *De Logarithmis, eorumque natura, atque uſu.*

CUm triangulorum reſolutio, quæ per ſinus, tangentes, & ſecantes habetur, abſolvi debeat per regulam Proportionum, in qua multiplicatio, & diviſio, ob numeros ſeptem, vel octo characteribus conſtantes, multum laboris, & tædii importare ſolet; hinc eſt, quod Joannes Neperus Scotus, vir numquam ſatis laudandus, alios numeros pro ſinibus, tangentibus, & ſecantibus excogitavit, & ann. 1620 promulgavit, quorum ope ſola additio præſtat omne id, quod præſtare ſolebat multiplicatio, & ſubtractio idem efficit, quod diviſio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & uſum hic breviſſime explicamus.

## LEMMATA.

I. In progreſſione Arithmetica quatuor terminorum ſumma duorum extremorum æquatur mediorum ſummæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit $4 + 1 = 2 + 3$.

Coroll. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex ſumma ſecundi, & tertii termini auſertur terminus primus, reſiduum dat quartum Arithmetice proportionalem quæſitum.

II. In progreſſione Arithmetica trium terminorum, ſumma duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati ſint 2, 5, 8, erit $2 + 8 = 10$.

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo ſecundi auſertur primus. Sic $10 - 2 = 8$.

Co-

Corol. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, ſi accipiatur eorum ſummæ ſemiſſis. Sint dati 2 & 8, eorum ſummæ ſemiſſis 5 eſt medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

## PROPOSITIO I.

*De natura Log-morum, eorumque inventione.*

*Log-mi* ſunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, ſeu reſpondentes numeris Geometrice proportionalibus: vel ſunt numeri, qui Arithmeticam, ubi ii, quorum iſti ſunt Log-mi, Geometricam ſervant proportionem. Ut ſi concipiatur ſeries quæcunque numerorum Geometrice proportionalium, ut in *A*, cui reſpondeat alia ſeries numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui creſcant ut in *B* & *C*, vel decreſcant, ut in *D*; omnes hi numeri *B*, *C*, *D*, dicuntur Log-mi numerorum in *A* exiſtentium.

| *A* | *B* | *C* | *D* | *M* | *N* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 100 | 1 | 0.0000000 |
| 2 | 2 | 5 | 90 | 10 | 1.0000000 |
| 4 | 3 | 7 | 80 | 100 | 2.0000000 |
| 8 | 4 | 9 | 70 | 1000 | 3.0000000 |
| 16 | 5 | 11 | 60 | 10000 | 4.0000000 |
| 32 | 6 | 13 | 50 | 100000 | 5.0000000 |
| 64 | 7 | 15 | 40 | 1000000 | 6.0000000 |
| 128 | 8 | 17 | 30 | 10000000 | 7.0000000 |
| 256 | 9 | 19 | 20 | 100000000 | 8.0000000 |
| 512 | 10 | 21 | 10 | 1000000000 | 9.0000000 |
| 1024 | 11 | 23 | 0 | 10000000000 | 10.0000000 |

Quamvis autem Log-morum ſpecies poſſit aſſumi ad

ad libitum, ut diximus, præſtantiſſima tamen, & commodiſſima eſt illa, quæ cifram, ſeu o ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cifris, nempe 8, vel ſeptem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progreſſione Arithmetica procedentibus, ſeu Log-mis illæ cifræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de ſinu toto reſpectu ſinuum, tangentium, & ſecantium, utque calculus facilior evadat.

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis ſit o, ſequitur Log-mum numeri, qui ſit minor unitate, ut ſunt fractiones, minorem eſſe quam o, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & deſignatur nota —.

Coroll. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 excluſive habent o pro prima nota: qui ſunt inter 10, & 100 habent pro primò numero 1; qui vero ſunt inter 100, & 1000 habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & ſic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicuntur *characteriſtici*, ſive *indicativi*: nam indicant quot figuris conſtat numerus abſolutus, cujus ſunt Log-mus, & puncto ab aliis ſeparantur.

Coroll. III. Characteriſtica ſemper unitate minor eſt numero figurarum numeri abſoluti. Hinc dato quovis numero abſoluto v. g. 82050 quinque figurarum, ſtatim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteriſtitica, & ſic de aliis.

## PROPOSITIO II.

*Si Log-mus unitatis ſit* o, *erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.*

Sit factum 24, cujus factores ſunt 4 & 6, erunt qua-

quatuor termini Geometrice proportionales, *ex Defin. multiplicat.*, 1 . 4 :: 6 . 24, eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, *ex Prop.* 1. Sed Log mi extremorum 1, 24, æquantur Log-mis 4, 6, *per lemm.* 1. Log-mus autem unitatis ex hypotheſi eſt 0; ergo ſi Log-mus unitatis ſit 0, Log-mus facti æquatur ſummæ ex Log-mis efficientium 4 & 6. Quod &c.

Coroll. I. Hinc ſequitur, Log-mum numeri compoſiti plani, ſeu ſolidi æqualem eſſe aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel ſolidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur ſummæ Log-morum 3 & 24, aut 6 & 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus conſurgit numerus 72.

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum eſſe Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi ſuæ radicis: nam factores quadrati, & cubi ſunt idem numerus bis, vel ter ſumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuſcunque $x^2$, $x^3$, $x^4$ &c. dividas per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radicis ejuſdem dignitatis. Contra ſi Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis, habebis Log-mum ejuſdem dignitatis. Sit $x^3 = 8$, ejuſque Log-mus ex tabulis 0.9030900: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus reſpondens radici 2; ſi vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030900 Log-mum dignitatis $x^3$, ſeu cubi 8.

## PROPOSITIO III.

*Si Log-mus unitatis eſt* 0, *differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mi quoti eorundem numerorum.*

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-

Log-morum ſit 0.6020600, dico hanc eſſe Log-mum quoti eorumdem, nempe 4. Nam cum ſit diviſor ad dividendum, *ex Defin. diviſ.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometrice proportionales 6. 24 :: 1. 4, eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo, *per lem.* 1. *hujus*, Log mi numerorum 24, & 1 æquantur Log-mis extremorum 4 & 6; ſed ex hypotheſi Log-mus unitatis eſt 0, ergo ſi ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus diviſoris 6, Log-mus reſiduus, ſeu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe 0.6020600, qui reſpondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

Coroll. Hinc habetur ſummam Log morum diviſoris, & quoti æqualem eſſe Log-mo dividendi.

## PROPOSITIO IV.

*Numeri cujuſcunque Log-mum invenire.*

Inveniendus ſit Log-mus numeri 7. Statuatur progreſſio Geometrica 1, 10, 100, 1000 &c. & aſſumantur Log-mi his terminis reſpondentes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000 &c. eo modo, quo dictum eſt *in Propoſ.* 1. *hujus*. Deinde unitatem *A*, & denarium *B* auge tot cifris, quot placuerit, ut 7, 8, 9 &c. (hic cifræ 6 adduntur) & inter *A* & *B* inveniatur medius proportionalis Geometricus C, *per Propoſ.* 11. *Cap.* 6. *Arithm.* erit hic minor numero ſeptenario, qui etiam intelligi debet auctus tot cifris, quot aucta fuit unitas, nempe ſex. Inveniatur ergo inter C minorem, & *B* majorem alius Geometrice proportionalis *D per Prop. cit.*, qui pariter cum ſit minor, quam 7.000000, poterit inter ipſum *D* minorem, & *B* majorem inveniri medius Geometrice propor-

| | | |
|---|---|---|
| A | 1.000000 | 0.0000000 |
| C | 3.162278 | 0.5000000 |
| B | 10.000000 | 1.0000000 |

tic-

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 3.162278 | 0.5000000 | M | 6.994015 | 0.8447266 |
| D | 5.623413 | 0.7500000 | O | 6.997936 | 0.8449707 |
| B | 10.000000 | 1.0000000 | N | 6.001883 | 0.8452148 |
| D | 5.623413 | 0.7500000 | O | 6.997936 | 0.8449707 |
| E | 7.498942 | 0.8750000 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| B | 10.000000 | 1.0000000 | N | 7.001883 | 0.8452148 |
| D | 5.623413 | 0.7500000 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| F | 6.493816 | 0.8125000 | Q | 7.000899 | 0.8451538 |
| E | 7.498942 | 0.8750000 | N | 7.001883 | 0.8452148 |
| F | 6.493816 | 0.8125000 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | R | 7.000407 | 0.8451233 |
| E | 7.498942 | 0.8750000 | Q | 7.000899 | 0.8451538 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| H | 7.233942 | 0.8593750 | S | 7.000161 | 0.8451080 |
| E | 7.498942 | 0.8750000 | R | 7.000407 | 0.8451233 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| I | 7.104974 | 0.8515625 | T | 7.000038 | 0.8451004 |
| H | 7.233942 | 0.8593750 | S | 7.000161 | 0.845108 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | P | 6.999915 | 0.8450928 |
| K | 7.041355 | 0.8476562 | V | 6.999977 | 0.8450966 |
| I | 7.104974 | 0.8515625 | T | 7.000038 | 0.8451004 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | V | 6.999977 | 0.8450966 |
| L | 7.009760 | 0.8457031 | X | 6.000007 | 0.8450985 |
| K | 7.041355 | 0.8476562 | T | 7.000038 | 0.8451004 |
| G | 6.978306 | 0.8437500 | V | 6.999977 | 0.8450966 |
| M | 6.994015 | 0.8447266 | Y | 6.999992 | 0.8450975 |
| L | 7.009760 | 0.8457031 | X | 6.000007 | 0.8450985 |
| M | 6.994015 | 0.8447266 | Y | 6.999992 | 0.8450975 |
| N | 7.001883 | 0.8452148 | Z | 7.000000 | 0.8450980 |
| L | 7.009760 | 0.8457031 | X | 7.000007 | 0.8450985 |

tionalis *E*, nempe 7.498942, qui major eſt ipſo 7.000000; ideoque inter ipſum *E*, & proxime minorem *D* inveniatur medius Geometrice proportionalis *F*, qui minor eſt ipſo *E*; proinde inter *F* & *E* inveniri poteſt medius *G*, qui adhuc minor eſt ipſo *E*. Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem inveniuntur medii Geometrice proportionales *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, &c. donec tandem occurrat medius proportionalis $Z = 7.000000$, qui nullo penitus exceſſu, vel defectu differt ab ipſo numero ſeptenario.

Deinde ſicuti inter *A* & *B* inventus fuit medius Geometrice proportionalis *C*, ſic inter eorum Log-mos inveniatur medius Arithmetice proportionalis *per Coroll.* 2. *lemm.* 2. nempe 0. 5000000. Erit hic Log-mus ipſius numeri *C*. Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi medii Geometrice proportionalibus *D*, *E*, *F*, *G* &c. reſpondentes: quo facto, habebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0.8450980.

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor imminuitur. Nam invento Log-mo numeri v. g. 6. ſi hunc dividas, ſemiſſis dat Log-mum numeri 3, *per Coroll.* 2. & 3. *Propoſ.* 2. *hujus*. Item invento Log-mo numeri 6, habetur Log-mus numeri 2, nam ſi dividas 6 per 3, quotus eſt 2; ſubtracto igitur Log-mo numeri 6, reſiduum dat Log-mum quoti 2, *per Prop.* 3. *hujus*. Pariter ſubtrahendo Log-mum numeri 2 modo inventum a Log-mo numeri 10, habetur Log-mus quoti 5, *per Prop.* 3. *cit.*, & ſic proportionaliter de aliis.

Coroll. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compoſitorum. Nam ſi Log-mum binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius ſeriei 2, 4, 8, 16, 32,

32, &c. ſi idem facias cum Log-mo ternarii, habebis ſeriem Log-morum pro numeris 3, 9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compoſitus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi ſupponuntur jam cogniti; ſi addas eorum Log-mos, habebis Log-mos omnium numerorum *per Prop. 2. hujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-mum, præter characteriſticam, ut vides in *A* & *B*.

| *A* | | *B* | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000000 | 3 | 0.4771212 |
| 10 | 1.0000000 | 30 | 1.4771212 |
| 100 | 2.0000000 | 300 | 2.4771212 |
| 1000 | 3.0000000 | 3000 | 3.4771212 |

Schol. *Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, ſeu abſolutis ab* 1 *uſque ad* 20000, *&* *a* 90000 *uſque ad* 100000 *primus conſtruxit Henricus Briggius Anglus in Academia Oxonienſi ex conſilio Jo. Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox implevit Adrianus Ulacq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

## PROPOSITIO V.

*Multiplicare duos numeros, qui minores ſint quam* 10000.

Sint multiplicandi inter ſe duo numeri 144, & 64, quorum Log-mi ex tabulis 2. 1583625, & 1. 8061800, quæritur factum. Adde ſimul duos Log-mos inventos, ſumma dabit Log-mum 3. 9645425, cui in tabulis reſpondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144; & 64.

*De-*

*Demonſt.* patet ex *Prop.* 2. *hujus*.

Schol. *Si ſumma duorum Logarithmorum ſuperet* 4.0000000, *qui eſt maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus.*

## PROPOSITIO VI.

*Numerum integrum minorem, quam* 10000 *per alium dividere.*

Sit numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis eſt 3.8645425. Diviſor ſit 64, cujus Log-mus eſt 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi ſubtrahe Log-mum diviſoris, Log-mus reſiduus, nempe 2.1583625, in tabulis quæſitus dat quotum 144.

*Demonſt.* patet ex *Prop.* 3. *hujus*.

Schol. *Cum Log-mus ille reſiduus non invenitur in tabulis præciſe, ſignum eſt, quoto minutiam aliquam adhærere, quæ quanta ſit, reperietur, ut mox docebimus.*

## PROPOSITIO VII.

*Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.*

Sint dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus ſecundi addatur Log-mo tertii, & a ſumma ſubtrahatur Log-mus primi, Log-mus reſiduus dat in tabulis numerum quæſitum.

*Demonſt.* patet ex *lemm.* 1.

PRO-

## PROPOSITIO VIII.

*Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, ſed numerum 10, 000 000 non excedentibus.*

Sit numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex reſiduis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cifris, quot ſunt ipſæ figuræ reſiduæ, nempe $\frac{54}{100}$.

2. Log-mus jam inventus ſubtrahatur a Log-mo proxime ſequenti, nempe a Log-mo numeri 9238.

*Num.* 9238, *Log.* 3.9655779
*Num.* 9237, *Log.* 3.9655309

*Diff. Log.* —— 470

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Log-morum 470 ad quartum proportionalem 253 $\frac{80}{100}$.

4. Adde 253 (fractio negligi poteſt) Log-mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteriſtica tot unitatibus augeatur, quot ſunt cifræ in diviſore (ut hic 2) erit Log-mus quæſitus 5.9655562.

*Demonſtr.* Certum eſt, quod ſi numerus 9237 creſceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis eſt differentia duorum Log-morum ſe integra unitate ſuperantium: ſed creſcit tantum $\frac{54}{100}$, nam diviſus per 100, quotus eſt 9237 $\frac{54}{100}$; ergo per regulam proportionum inqui-

K ren-

rendum eſt, quantum augeri debeat Log mus ejuſdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{54}{100}$, quæ quidem minus ſunt, quam integra unitas, ſeu $\frac{100}{100}$. Inſtituta itaque regula proportionum, invenitur Logmum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum eſſe partibus 253, fitque Logarithmus 3.9655562 pro numero 9237 $\frac{54}{100}$.

Demum characteriſtica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cifræ fuerunt in diviſore (ut hinc 2): ob diviſorem 100. Nam numerus datus cum diviſus ſit per 100, eſt numerus quotus: ſed *per Coroll. Prop.* 3. *hujus*, ſumma Log-morum diviſoris & quoti æqualis eſt Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Logmus dividendi 923754, addi debet Log-mo quoti 3.9655562 Log-mus diviſoris 100, nempe 2.0000000, quod, ut compendioſius fiat, ſatis eſt augere characteriſticam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. I. Si daretur numerus major, quam 10, 000, 000 (quod in praxi vix contingit) hæc regula non ſufficeret. Nam creſcentibus numeris abſolutis, differentiæ Logarithmorum decreſcunt, ita ut tandem evaneſcant, & fiant omnino æquales ipſi Logarithmi. Sic numeri 2656385774, & 2656385775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log mum 9.4242911, ut ex tabulis majoribus Briggii apparet. Ideoque inſtitui non poſſet regula proportionum, cum deſit differentia Log-morum.

Coroll. II. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi ſupputati ad denarii Log-mum 1.0000000, ut in tabulis communibus factum eſt, ſunt inter ſe æquales. Quapropter ſi daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, ſufficeret pro ejus Log-mo ſumere Log-mum primarum decem figurarum, quod notaſſe valde utile erit.

Schol. *Si numerus datus dividi poteſt per quoſcunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam* 10000,

10000; *ſumma Log-morum diviſoris & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus 12456, divide per 3. fit 4152, adde ſimul Log-mum numeri 3, nempe 0.4771212, & Log-mum numeri 4152, nempe 3.6182573, ſummâ 4.0953785 dat Log-mum dati numeri.*

*Similiter ſit numerus datus 98796, divide per 2 fit 49398, & hunc iterum per 2 fit 24699, & hunc per 3 fit 8233, qui minor eſt quam 10000; adde ſimul Log-mos omnium diviſorum 2, 2, 3, ſeu (idem enim eſt)* per Cor. 1. Prop. 2. hujus, *ſume Log-mum numeri ſolidi compoſiti ex 2, 2, 3, ideſt 12, qui eſt 1.0791812, cui adde Logarithmum ultimi quoti, nempe 8233, qui eſt 3.9155581: ſumma 4.9947393 eſt Log-mus dati numeri 98796.*

## PROPOSITIO IX.

*Datæ fractionis Log-mum invenire.*

1. Subtrahe Log-mum numeratoris e Log-mo denominatoris, & reſiduo Log-mo præpone ſignum ſubtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis $\frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} Log.\ 5. &= 0.\ 6989700 \\ Log.\ 2. &= 0.\ 3010300 \\ \hline Log.\ \tfrac{2}{5} &= -0.\ 3979400 \end{aligned}$$

2. Si fractionis datæ numerator ſit major denominatore, ut $\frac{9}{5}$ ſubtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; reſiduum dat Log-mum quæſitum.

$$\begin{aligned} Log.\ 9. &= 0.\ 9542425 \\ Log.\ 5. &= 0.\ 6989700 \\ \hline Log.\ \tfrac{9}{5} &= 0.\ 2552725 \end{aligned}$$

 3. Si

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integra reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$, erit

$$Log.\ 23 = 1.\ 3617278$$
$$Log.\ 7 = 0.\ 8450980$$
$$Log.\ 3\tfrac{2}{7} = 0.\ 5166298$$

Similiter quæritur Log-mus numeri $354\frac{3}{4}$, reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$, & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Logarithmus quæſitus.

$$Log.\ 1419 = 3.\ 1519824$$
$$Log.\ 4 = 0.\ 6020600$$
$$Log.\ \tfrac{1419}{4} = 2.\ 5499224$$

Ratio regulæ eſt, quia cum fractio ſit quotus proveniens ex diviſione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti eſt æqualis, *per Prop.* 3. *hujus*, differentiæ Log-morum diviſoris & dividendi, ideſt numeratoris & denominatoris, ideoque ubi numerator minor eſt denominatore, ac proinde per eum dividi non poteſt, Log-mus major e minori ſubtrahendus eſt: quo in caſu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis ſignum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto poteſt etiam haberi ſic. Sit numerus datus $3560\frac{3}{4}$, ſume differentiam Log-morum numeri 3560, & numeri Log-mus eſt 3. 5514500; ſecundi numeri eſt 3. 5515720, differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 ad Log-mum numeri 3560, nempe 3. 5514500, habebis Logarithmum integri cum fractione, ſc. 3. 5515415. Quod &c.

PRO-

## PROPOSITIO X.

*Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non exiſtit, invenire numerum ei reſpondentem.*

Si Characteriſtica dati Log-mi ſit o, vel 1, vel 2, mutetur in 3, & quæratur inter 1000, & 10000 Log mus, qui ſit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæſitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates Characteriſticæ acceſſerunt.

Sit datus Log-mus 1. 9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, Characteriſtica 1 fiat 3, erit 3. 9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 reſpondentem Log-mo 3. 9201233, qui eſt proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæſitus erit 83 $\frac{20}{100}$, ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit Characteriſtica.

Si Log-mus datus habeat Characteriſticam 3, & non reperiatur accurate in tabulis, ut Log-mus 3. 5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 reſpondentem Logarithmo 3. 5162709, qui eſt proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Log-mum a proxime ſequenti 3. 5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipſomet Log-mo dato, erit ſecunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad ſecundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum aſſumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94, erit ergo numerus quæſitus Log-mi dati 3282 $\frac{94}{100}$.

*Demonſtr.* Eodem fere modo, quo *Prop.* 8. *hujus*.

 Nam

Nam differentia Log-morum prima eſt differentia unitatis, quæ ita ſe habet ad differentiam ſecundam, Log-mi ſcilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Logarithmorum differentiæ ſunt minores, ac proinde, quæ capienda eſt pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. *Ubi tamen in minimis ſcrupuloſi non ſumus, ad praxim ſatis eſt ſumere numerum reſpondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejuſmodi negligere.*

## PROPOSITIO XI.

*Dato Logarithmo defectivo, numerum ei reſpondentem invenire.*

Sit datus Log-mus defectivus — 0. 2218488, quæritur fractio, quæ ei reſpondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000 e cujus Log-mo 2.0000000, vel 3.0000000, vel 4. 0000000 ſubtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum reſpondentem Log-mo reſiduo 2.7781512, qui dat 600 pro numeratore quæſitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, ſeu $\frac{3}{5}$.

| | | |
|---|---|---|
| *Log. num.* 1000. | = | 3. 0000000 |
| *Log. def.* | =— | 0. 2218488 |
| *Log. reſ.* | = | 2.7781512, *qui dat* |

*600. Eſt ergo* $\frac{600}{1000}$, *ſeu* $\frac{3}{5}$.

Similiter ſit Log-mus defectivus — 0. 3679767, quem ſubtrahe ex 4. 0000000, reſiduum 3. 6320233 in

in tabulis quæſitum dat 4285 pro numeratore fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

*Log. num.* 10000 = 4.0000000
*Log. def.* = − 0.3679767

*Log. reſid.* = 3.6320233, *qui dat* 4285 *proxime*. *Eſt ergo* $\frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}$.
*Demonſtr. ut Propoſ.* 9.

## PROPOSITIO XII.

*Dato Log-mo excedente Log-mum* 4.0000000 *numerum ei congruum invenire*.

1. A dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut ſcilicet reſiduum ſit proxime minus Log-mo 4.0000000, qui eſt tabularum maximus.

2. Quæratur ex tabulis numerus conveniens huic reſiduo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablatus fuit a Log-mo dato, factum eſt numerus quæſitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc eſt 4.0000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis reſpondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5032}{10000}$, *per Prop.* 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæſitus 68745032.

*Log.* 7.8372413
*Log.* 4.0000000

*Log.* 3.8372413, *qui dat* 6874 $\frac{5032}{10000}$
*Duc in* 10000, *fit* 68745032.

 Si-

Similiter ſit datus Log-mus 8. 2718416, ex quo aufer Logarithmum 4. 0000000; remanet 4. 2718416, qui adhuc major eſt, quam 4. 0000000. E reſiduo igitur Log-mo 4. 2718416 rurſus aufer 1. 0000000, remanet 3. 2718416, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870, quem multiplica per 10000, & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæſitus.

*Demonſtr.* Subducere Log-mum numeri 10, 100, 1000 &c. a Log-mo dato, eſt idem ac numerum quæſitum dividere per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo diviſor 10, vel 100 &c. ad dividendum, quem voco $Z$, ut unitas ad quotum; ergo *per Prop.* 3. *hujus*, differentia Log-morum diviſoris, & dividendi, (hoc eſt in ſecundo exemplo Log-mus 3.2718416) æquatur Log mo quoti, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870. Cum igitur ſint proportionalia 100000 ad $Z$, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia ſunt mediis *per Propoſ.* 16. *lib.* 6. *Eucl.*, ideſt $Z = 187000000$. Quod &c.

Schol. *Cum reſiduum ex diviſione ſuperat dimidium diviſoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto* 5031, *ſumitur* 5032. *Nam diviſis* 3180000 *per* 632 *remanet* 408. *Quod pro hujuſmodi calculis nota. Quæ ſequuntur*, Trigonometriæ *doctrinam ſupponunt.*

## PROPOSITIO XIII.

*Dati cujuſcunque Sinus Log-mum invenire.*

Ut Log-mi Sinuum accuratiores inveniantur, ſupponitur Sinus conſtructos fuiſſe ad radium ſaltem 10000000000, & tribus deinde ultimis notis multatos, quales ſunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic Sinus ex. gr. grad. 5. ſupputatus ad Sinum

num totum 10000000000 eſt 871557427, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet conſiderari debeat tanquam numerus aliquis abſolutus, & vulgaris, Log.mi Sinuum quorumcunque habentur *per Propoſ.* 8. *hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque ſit eorum inventio, neceſſe erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri poteſt, notas aſcendant.

Log-mi autem Sinuum reſpicere debent Sinus ipſos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, reſpectu ſcilicet ad ſinum totum 10000000000. Sinus itaque ex. gr. grad. 5, qui in tabulis Ulacq eſt 871557, habet pro ſuo Log-mo 8.9402960.

Pariter grad. 61. 50' Sinus eſt 8815782, Log-mus vero 9.9452609. Ex Characteriſtica enim, quæ ſemper unitate minor eſſe debet numero figurarum ipſius ſinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit ſinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui ſupputatus ad Sinum totum 10000000000 eſt 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Log-morum numerus, qui reſpondeat quinque notis ad ſiniſtram, cujus Log-mus eſt 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop.*8., inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime ſequentis, quæ eſt 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ reſiduæ dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui ſi addatur Log-mo jam invento 4.5918768, prodit Log-mus quæſitus, hoc eſt 9.5918780, mutata Characteriſtica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus; atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo ſi Log-mus aliquis auferatur, reſiduum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut ſi ex

ex ipſo Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9.5918780, reſiduum 0.4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejuſdem Sinus, quo utemur inferius.

## PROPOSITIO XIV.

*Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus.*

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri poſſunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, ſed compendioſius habentur ſic.

1. Sume Log-mum Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A ſumma aufer Log-mum complementi ejuſdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, reſiduus erit Log-mus Tangentis quæſitus. Inveniendus ſit Log-mus Tangentis grad. 23.

| | |
|---|---|
| *Adde Log. ſin.* 23. = | 9. 5918780 |
| *Log. ſin. tot.* = | 10. 0000000 |
| *Summa* | 19. 5918780 |
| *Log. complem.* | 9. 9640261 |
| *Tangen. Log.* | 9. 6278519 |

*Demonſt.* patet ex *Probl* 6. Trigonometriæ Tacquet, in qua oſtenſum fuit, ita ſe habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejuſdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quæſitam: quæ ut inveniatur, adduntur ſecundus & tertius terminus, & a ſumma ſubtrahitur primus *per Prop.* 7. *hujus*.

2. At vero pro inveniendis Secantibus dati arcus, duplari debet Log-mus Sinus totius, & ex duplo auferri Sinus complementi ejuſdem arcus, nam reſiduum dabit Log-mum Secantis quæſitæ. Sit exemplum.

—plum. Quæritur Log-mus Secantis pro dato arcu grad. 23.

| | | |
|---|---|---|
| *Log. ſin. tot.* | = | 10. 0000000 |
| | | 2 |
| *Ejus duplum* | = | 20. 0000000 |
| *Log. ſin. compl.* | = | 9. 9640261 |
| *Secan. Log.* | = | 10. 0359739 |

*Demonſt.* ex *Probl. 6. cit.* deducitur. Nam ſunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæſita, ut ibi oſtenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis reſpondens, hoc eſt Log-mus Secantis, ex duplo ſecundi termini aufertur primus, *per Cor. 1. lemm. 2.*

Coroll. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus, Tangentis, vel Secantis, ſignum eſt, illum præter minuta prima, continere etiam ſecunda, quæ ſi quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop.* 10. pro inveniendis fractionibus. Quod ſi ea diligentia opus non ſit, ſatis erit ſumere gradus cum minutis primis, quæ Log-mo proxime minori reſpondet.

Coroll. II. In Tab. Ulacq Log-mi Sinuum non habent Characteriſticam majorem, quam 9. Proinde ſi, calculo abſoluto, ex Log-morum additione reſultet Characteriſtica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a ſiniſtris abjicitur, fitque Characteriſtica 0, 2, 5 &c.

Coroll. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores ſunt. A gradibus vero 45 uſque ad 90 Log-morum Tangentes non habent Characteriſticam majorem 13. Idcirco ſi, poſt additionem factam, Characteriſtica duabus conſtet figuris, tunc vel ſecunda figura excedit 3, & in hoc caſu

caſu abjicitur prima, ſive ſit unitas, ſive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

| *A* | *B* |
|---|---|
| *Tang. Log.* 24. 6040812 | *Tang. Log* 21. 2162581 |
| *fit* 4. 6040812 | *fit* 11. 2162581 |

Schol. I. *Regula Trium etiam per ſolam Log-morum additionem poteſt abſolvi, ſi ſumatur prioris termini complementum Arithmeticum*, per Cor. Prop. 13., *& ad duos reliquos addatur. Dati ſint tres numeri proportionales* 4, 60, 25, *quæritur quartus. Prioris numeri* 4 *complementum Arithmeticum eſt* 9. 3979400, *addatur ad Log-mos duorum numerorum* 60 *&* 25, *ſumma dabit Log-mum quæſitum.*

*Num.* 4. *Compl. Arithm.* 9. 3979400
*Num.* 60 *Log.* 1. 7781512
*Num.* 25 *Log.* 1. 3979400

*Summa* 12. 5740312

*Fit* (*per Cor.* 2.) 2. 5740312, *dat in Tab.* 375.

Schol. II. *Si Sinus totus ſit primus, vel unus ex terminis regulæ Trium, poteſt omitti: nam in primo caſu eſt* 0; *& in ſecundo addit unitatem mox delendam.*

Schol. III. *Log-mi Sinuum vocantur abſolute Log-mi; ſed Log-mi Tangentium peculiari nomine* Meſologarithmi, *& Log-mi Secantium* Tomologarithmi. *In tabulis inveniri non ſolent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui poſſunt, ut vidimus, vel quia ſine ipſis calculus bene poteſt inſtitui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus ſecundus, & ab aliis* Coſinus. *Tangens & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans ſecunda, vel* Cotangens, *&* Coſecans: *quæ nomina ſi ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.*

Schol. IV. *Log-morum uſus patet in omnem fere Ma-*

*Matheſin. Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri poſſunt apud Ulacq, Cavalerium, & alios.*

## PROBL. I.

*Dati numeri quadratum, vel cubum per Log-mos invenire.*

1. Datus ſit numerus v. g. 18, cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, ſumma dabit Log-mum quadrati quæſiti.

*Num.* 18, *Log.* 1. 2552725
1. 2552725

*Summa* 2. 5105450, *dat in Tab. quadr.* 324.

2. Pro inveniendo ejuſdem numeri 18 cubo, ſume ter, ſeu multiplica per 3. Log-mum ipſius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæſiti.

*Num.* 18, *Log.* 1. 2552725
3

3. 7658175, *dat in Tab. cubum* 5832

Coroll. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis ſumpto, cubus vero ex Log-mo ter ſumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

## PROBL. II.

*Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales.*

1. Inveniendus ſit medius proportionalis inter 20, &

& 320. Adde eorum Log-mos, dimidiæ ſummæ Log-mus dat medium proportionalem quæſitum 80.

*Num.* 20, *Log.* 1. 3010300
*Num.* 320, *Log.* 2. 5051500

*Summa Log.* 3. 8061800
*Dimid. Log.* 1. 9030900, *dat in Tab.* 80.
*Eſt autem* ∺ 20, 80, 320.

2. Inveniendi ſint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales; regula generalis eſt: aufer Log-mum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus reſidui tertiam partem, ſi duo medii quærantur; vel quartam, ſi tres; vel quintam, ſi quatuor, adde Log-mo numeri minoris, nam ſummæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime conſequitur numerum datum minorem.

3. Ut habeantur medii proportionales reliqui, adde ſummæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log-mi partem, ſumma dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæſitos, ut exempla, quæ ſequuntur, rem ſatis illuſtrant. Signa + & — additionem, & ſubtractionem indicant. *Q* vero Log-mum quoti addendum.

4. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

*Num.* 120, *Log.* 2. 0791812
*Num.* 15, *Log.* — 1. 1760913

*Reſid.* 0. 9030899
*Divid. per* 3, *dat Q.* 0. 3010299
*Num.* 15, *Log.* + 1. 1760913

*Summa Log.* 1. 4771212, *dat in Tab.* 30
*Q. Log.* + 0. 3010299

*Summa Log.* 1. 7781511, *dat in Tab.* 60
*Sunt ergo* ∺ 15, 30, 60, 120, *ut patet.*

5. Quæ-

5. Quæruntur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

*Num.* 1620, *Log.* 3. 2095150
*Num.* 20, *Log.* — 1. 3010300

*Reſid.* 1. 9084850
*Divid. per* 4, *dat Q.* 0. 4771212
*Adde num.* 20, *Log.* + 1. 3010300

*Summa Log.* 1. 7781512, *dat in Tab.* 60
*Q. Log.* + 0. 4771212

*Summa Log.* 2. 2552724, *dat in Tab.* 180
*Q. Log.* + 0. 4771212

*Summa Log.* 2. 7323936, *dat in Tab.* 540
*Sunt ergo in continua proportione* ∺ 20, 60, 180, 540, 1620.

Schol. *Hæc ſane pulcherrima Log-morum praxis ob ſui facilitatem & brevitatem mihi tanti eſſe videtur, ut propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiſcendam eſſe putem. Unum aliquem ejus uſum ex innumeris, qui afferri poſſent, indicabimus in ſequenti* Probl. num. 5.

## PROBL. III.

*Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Log-mos expediuntur.*

1. Dantur fœnori ſcuta 500, & ex ſingulis 100 lucrum eſt ſcutorum 5, quæritur quot annis ea ſors duplicabitur,

Ex Log-mo numeri 100 ſubtrahe Log-mum nume-

meri 3, Log-mus reſiduus in Tab. dat annos quæſitos.

*Num.* 100, *Log.* 2. 0000000
*Num.* 5, *Log.* 0. 6989700

*Log. reſid.* 1. 3010300, *dat in Tab.* 20

Quod quidem manifeſtum eſt: nam ſi ſcuta 100 anno 1 dant 5, ſcuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compoſitam ex *Prop.* 2. *Cap.* 6. *Arith.*

Coroll. Si tempus, quo ſors illa duplicatur, ut ſupra inventum dividas per 2, per 4, vel 5 &c. habebis tempus, quo ſortis ejuſdem dimidium, ſeu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 30 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucrandam ejuſdem ſortis quartam partem, hoc eſt ſcuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum uſura aureorum 10 ex ſingulis 100 in annum ea lege, ut niſi ſolvat ſingulis annis, fiat ex fœnore auctio ſortis. Nihil fuit ſolutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propoſitum fuit in *Propoſ.* 13. *Arithm. num.* 5.

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, ſeu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1. 0000000 ex numeri 11 + Log-mo 1.0413927, reſiduum, ſeu Log-mus 0,0413927 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus reſidui Log-mus toties, quot ſunt anni (ut hic ter) eique addatur ſortis 500 Log-mus 2.6989700; ſummæ Log-mus 2.8231481 in Tab. quæſitus dabit pro ſorte & uſura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter ut in *Propoſ. cit.* fuit inventum.

*Num.*

| | | |
|---|---|---|
| *Num.* $\frac{21}{20}$ | *Log.* | 1. 0413927 |
| c | *Log.* | 1. 0000000 |
| *Reſid.* | *Log.* | 0. 0413927 |
| *Anni* 3 | | 3 |
| | *Log.* | 0. 1241781 |
| *Sortis* 500 | *Log.* | 2. 6989700 |
| *Summæ* | *Log.* | 2. 8231481, *dat* 665 $\frac{1265}{10000}$. |

3. Pupilli alicujus bona, quæ æſtimata fuerunt ſcutorum 1600, accepit Hortenſius pacto augendi quotannis ſortem ex fructibus ad rationem ſcutorum 5 in ſingula centena. Retinuit illa annis 6, menſibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum ſcuta 100 fiant 105, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, ſeu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21. Log-mo 1. 3222193, reſiduum 0. 0211893 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 ſumi debet ſexies, ſeu duci in 6, fitque 0. 1271358.

Ut habeantur menſes, ac dies, dividatur Log-mus ille reſiduus 0. 0211893 per 12, quotus 0. 0017657 dat Log-mum, quinquies ſumendum pro 5 menſibus datis, nempe 0. 0088285. Hic deinde diviſus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0. 000579, qui ſumendus eſt decies pro diebus 10, fitque 0. 0005790. Addatur his Log-mus 3. 2041200 pro ſorte ſcutorum 1600, habetur ex horum ſumma Log-mus 3. 3406633, qui in Tab. quæſitus dat numerum, ſeu ſcuta 2191 pupillo ipſi ab Hortenſio debita.

| | | |
|---|---|---|
| *Pro annis* | 6 *Log.* | 0. 1271358 |
| *Pro menſ.* | 5 *Log.* | 0. 0088285 |
| *Pro diebus* | 10 *Log.* | 0. 0005790 |
| *Pro ſorte* | 1600 *Log.* | 3. 2041200 |

*Summa* 3. 3406633, *dat* 2191.

4. Fingamus eundem Hortenſium debere alteri ſummam illam ſcut. 1600 ſolvendam poſt annos 6, menſes 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, ſiquidem ſcuta 5 ex ſingulis 100 a creditore ſibi relaxentur. Quæritur quantum debeat ſolvere.

Hæc quæſtio eadem ratione ſolvitur, dummodo ex Log mo 3. 2041200 ſortis 1600 auferatur ſumma Log morum pro annis 6, menſibus 5, diebus 10, ut ſupra inventa, nempe 0. 1365433. Nam reſiduus Log-mus 3. 0675767 in Tab. quæſitus dat ſummam ſolvendam ſcut. 1168.

| | | |
|---|---|---|
| *Pro annis* | 6 *Log.* | 0. 1271358 |
| *Pro menſ.* | 5 *Log* | 0. 0088285 |
| *Pro diebus* | 10 *Log.* | 0. 0005790 |

*Summa* — 0. 1365433

*Scut.* 1600 *Log.* + 3. 2041200

*Reſid.* 3. 0675767, *dat* 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, reſtituuntur poſt annos ſex una cum annuis uſurarum uſuris, quæ ſimul cum ſorte conficiunt ſummam ſcut. 1340; quæritur ſingulorum annorum uſura cum ipſa ſorte, & quanta fuerit ex ſingulis 100 uſura.

Inveniantur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) *per Probl.* 2. Dabunt illi ſummas quæſitas, hoc eſt ſortem una cum uniuſcunque anni uſura. En totius operationis typus.

Scu-

*Scuta* 1340, *Log.* 3. 1271048
*Scuta* 1000, *Log.* — 3. 0000000

*Reſid.* 0. 1271048
*Divide per* 6, *dat Q.* 0. 0211841

Log-mus ſextæ partis, quem voco *Q*, addatur primum Log-mo ſortis 1000, ſumma dabit Log-mum pro ſorte, & uſura primi anni *A*. Adde deinde huic ſummæ Log-mum ipſum *Q*, nova ſumma dabit Log-mum pro ſorte & uſura ſecundi anni *B*; & ſic deinceps addendo præcedenti ſummæ Log-mum eundem *Q*, aggregatum dat Log-mum pro ſorte & lucro annorum *C*, *D*, *E* &c.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Log.* | 3. 0000000 | | |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *A* |
| | *Log.* | 3. 0211841 | *dat ſc.* | 1050 |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *B* |
| | *Log.* | 3. 0423682 | *dat ſc.* | 1102 |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *C* |
| | *Log.* | 3. 0635523 | *dat ſc.* | 1157 |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *D* |
| | *Log.* | 3. 0847364 | *dat. ſc.* | 1215 |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *E* |
| | *Log.* | 3. 1059205 | *dat ſc.* | 1276 |
| *Q.* | *Log.* + | 0. 0211841 | | |
| | | | | *F* |
| | *Log.* | 3. 1271046 | *dat ſc.* | 1340 |

Inventa autem uſura primi anni *A* una cum ſorte, ſcutis ſcilicet 1050, ſtatim innoteſcit quanta fuerit ex ſingulis 100 uſura. Nam ſi 1000 fiunt 1050, ſcuta 100 per regulam proportionum fiunt

 105,

105, adeoque uſura fuit ſcut. 5 ex ſingulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur *ex Coroll. Prop. 13. Cap. 6. Arithm.*, & *ex præc. Probl.*

## PROBL. IV.

*Data tormenti bellici elevatione, diſtantiam ictus invenire, & e converſo.*

1. Experientia conſtat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli ſemirecti, ſeu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo ſemirecto æqualiter diſtantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales eſſe. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, exploſum fuiſſe globum ad diſtantiam paſſuum 4000; quæritur, quanta futura ſit diſtantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi ſervata) ad datam elevationem gr. 30.

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut ſinus totus ad ſinum anguli 30 duplicati, ſeu 60, ita paſſus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

| | | |
|---|---|---|
| *Gr.* 60, | *Log.* | 9. 9375306 |
| *Paſſ.* 4000, | *Log.* | 3. 6020600 |
| | *Summa* | 13. 5395906 |

*Fit* (*Cor.* 2. *Prop.* 14) 3. 5395906, *dat paſſ.* 3464.

2. Quod ſi e converſo data ſcopi diſtantia, ex. gr. paſſuum 1500, ad quem ictus eſt dirigendus, quæratur in ipſomet tormento elevationis angulus; fit ut diſtantia maximi ictus, ex. gr. paſſuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita diſtantia data paſſuum 1500 ad angulum elevationis quæſitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo caſu factum eſt, erit per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

*Paſſ.*

*Paſſ.* 4000 *Compl. Arithm.* 6. 3979400
*Paſſ.* 1500 *Log.* 3. 1760913

*Summa* 9. 5740313, *dat. gr.* 22. 1'.

Schol. *Quam ſingulari facilitate per Log-mos confici poſſint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari poſſint, quæque ad utranque hujus problematis partem maxime inſerviant, facile eſt intelligere.*

## P R O B L. V.

*Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.*

Statue in plano aliquo horizontali ſtylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipſum planum, qui diviſus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Calendaria innoteſcit) metire umbram, quam projicit ſtylus; ſitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum ſtylus continet 100. Erit per *Probl.* 5. *Tacquet Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad ſtyli longitudinem 100, ita longitudo ipſius umbræ, prout eſt Sinus totus, ad longitudinem ſtyli, prout eſt Tangens anguli altitudinis Solis, ſeu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19', nempe per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

*Long.* 89. *Compl. Arithm.* 8. 0506100
*Long.* 100. *Log.* 2. 0000000

*Tangens* 10. 0506100, *dat gr.* 48. 19'.

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41', eſt altitudo Poli Urbis Romæ quæſita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inven-

ta eſt gr. 41. 54', ſeu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ eſt gr. 48.

Schol. I. *Ceterum plures ſunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per ſtellas elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam ſit maxime neceſſarium, & Aſtronomiæ univerſæ ſit veluti baſis & fundamentum.*

Schol. II. *Ut habeantur altitudines meridianæ ſignorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Aſtronomicis paſſim occurrunt. Sic declinatió Solis in principio ſignorum Borealium ♉ & ♍ eſt gr.* 11. 30'. *Hos adde ad Equatoris altitudinem, quæ Romæ, ut diximus, eſt gr.* 48, *erit altitudo meridiana Solis ♉ & ♍ initium ingreſſi gr.* 59. 30'. *Quod ſi altitudinem meridianam Solis quæras pro initio ſignorum Auſtralium ♐ & ♒, ſubtrahe ab Æquatoris altitudine, nempe ex. gr.* 48, *eorum declinationem, quæ eſt gr.* 20. 12'., *reſiduum dat gr.* 27. 48'. *pro altitudine meridiana quæſita.*

## PROBL. VI.

*In linea meridiana Zodiaci ſigna deſcribere.*

Ducta in aliquo plano horizontali linea meridiana, prout in elementis Sphæricis docetur, quam ſingulis diebus Sol per foramen exiguum tranſiens, in ipſo meridiei momento tangat, deſcribenda ſint in illa Zodiaci ſigna, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoſcendum tempus, quo Sol ea ſigna ingreditur, atque percurrit.

Metire altitudinem gnomonis, ſeu muri uſque ad foramen illud, per quod Sol tranſit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet menſura. Tum inventis altitudinibus meridianis ſignorum Cœleſtium, *per Schol.* 2. *Probl.* 5., habebis earum complementa, & complementorum ipſorum Meſolog.mos, ſeu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout eſt Sinus to-

totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis ſigni, ſeu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus diſtabit ab initio lineæ meridianæ ſigni cœleſtis locus in ipſamet linea meridiana deſignandus.

*Sit exemplum*. Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani juſſu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Franciſco Blanchino ejuſdem Pontificis Prælato domeſtico conſtructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri uſque ad foramen, per quod tranſit radius Solaris, eſt unciarum 750 pedis regii Pariſienſis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inſerta eſt. Fingamus huic Zodiaci ſigna ♐ & ♒ (nam bina ſimul deſcribuntur) eſſe a nobis inſcribenda, ſeu quærendum eſſe punctum, quod Sol tangit, ubi ſigna illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem ſignorum eſt gr. 27. 48'., *per Schol.* 2. *Probl.* 5., eorumque complementum gr. 62. 12'. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10. 2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout eſt Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10. 2779915, ita eadem muri altitudo, prout eſt unciarum 750 Logarithmus, ad Logarithmum pro unciis quæſitis. Erit *per Schol.* 1. *&* 3. *Prop.* 14.

| | | |
|---|---|---|
| *Complem. Tang.* | 10. | 2779915 |
| *Unc.* 750. *Log.* | 2. | 8750613 |
| *Summa* | 13. | 1530528 |

*Fit* (*Cor.* 2. *Prop.* 14.) 3. 1530528, *dat unc.* 1422.

Diſtabunt igitur ſigna ♐ & ♒ a principio lineæ meridianæ unciis 1422 pedis ejuſdem Pariſienſis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci ſignorum in ipſa linea meridiana locus deſignabitur.

# APPENDIX

## *Praxeon Chronologicarum.*

CUm tempus ex Ariſtotele lib. 4. Phyſic. Cap. 11. ſit numerus, ſeu menſura motus ſecundum prius & poſterius, non erit abs re hic praxes aliquot Chronologicas ſubjicere, quæ a numeratione temporis, ſeu motuum Cœleſtium Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem non tam præclarum eſt ſcire, præſertim Eccleſiaſticis viris, quam turpe neſcire, id quod de Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur ſunt primo termini aliquot Chronologici.

## DEFINITIONES.

1. *Cyclus*, ſeu *Periodus* eſt certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præſertim ſunt Cycli Solaris, Lunaris, & Indictionis.

2. *Cyclus Solaris* eſt intervallum annorum 28; quo evoluto, literæ Dominicales *A. B. C. D. E. F. G.* Calendario appoſitæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad eaſdem ferias.

3. *Cyclus Lunaris*, ſive *aureus Numerus* eſt ſeries annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inſcribebatur ad novilunia indicanda.

4. *Indictio* eſt ſeries annorum 15 in orbem rediens, poſt Conſtantini tempora, ſive ab anno Chriſti 312, ut fama eſt, in uſum recepta apud Græcos & Romanos; hoc diſcrimine, quod Indictio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septemb. initium ducit.

5. *An-*

5. *Annus Julianus* a Julio Cæſare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, eſt dierum 365 hor. 6, quæ quidem horæ 6 ſingulis quatuor annis horas 24, ſeu diem ſolidum conſtituunt. Itaque annus Julianus, qui conſtat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 ſingulis quadrienniis, *Biſſextilis* dicitur, quod ſcilicet dies ſextus ante Kal. Martias bis numeretur, ſeu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.

6. *Annus Gregorianus* eſt annus Julianus a Gregorio XIII. Pontifice anno 1582. correctus, 10 diebus ſubductis. Differt a Juliano in hoc, quod poſt annum Chriſti 1600. e ſingulis annis centeſimis, qui omnes in Calendario Juliano biſſextiles ſunt, in Gregoriano tres primi, nempe 1700, 1800, & 1900 ſunt communes, & ſolus quartus 2000 biſſextilis erit.

7. *Epactæ* ſunt dies undecim, qui addendi ſunt ad annum lunarem, (qui conſtat diebus 354) ut adæquet annum ſolarem; qui eſt dierum 365, ut dictum eſt. Unde ſi hoc anno ex. gr. fuerit Epacta XI., ſequenti anno erit XXII., ſed tertio anno Epacta erit III. Nam quoties Epactæ hujuſmodi additæ excedunt numerum 30, detrahitur numerus 30, & reſiduus numerus eſt Epacta illius anni. Si per additionem fiant 30, Epacta illius anni erit *, ſeu nihil.

8. *Periodus Victoriana*, ſeu *Dionyſiana* eſt ſeries annorum 532 e Cyclo Solari 28 in Cyclum Lunarem 19 multiplicato contexta, qua peracta, iidem Cycli Solis & Lunæ iterum redeunt. Dicitur *Victoriana*, quod a Victore Aquitano anno Chriſti 457 inſtituta ſit, vel *Dionyſiana* a Dionyſio quodam *Exiguo*, qui ad Eccleſiam Romanam cum Alexandrina circa celebrationem Paſchatis conciliandam, illam adhibuit.

9. *Periodus Juliana* eſt ſeries annorum 7980, quæ

ex

ex Cyclorum Solis, Lunæ, & Indictionis multiplicatione oritur, ſive eſt productum ex multiplicatione Periodi Victorianæ per Cyclum Indictionis, nempe annorum $532 \times 15 = 5280$; in qua tres illi Cycli Solis, Lunæ, & Indictionis, qui in præſenti hoc anno conveniunt, in alio iterum non convenient, niſi poſt annos 7980 expletos. Dicitur Juliana, quod Julianis annis conſtet. Eſt Periodus omnium præſtantiſſima, quæ incœpit anno 710 ante Orbem conditum, & nondum eſt abſoluta, a Joſepho Scaligero excogitata.

10. *Epocha*, ſive *Æra* eſt terminus, a quo anni numerantur. Sic Æra Chriſtiana, qua nunc vulgo utimur, & vulgaris dicitur, numerat annos a Chriſti nativitate, ſeu potius ab ejus Circumciſione, hoc eſt a Kal. Januariis poſt orbem conditum annis 4004 juxta Cl. Uſſerii calculum.

Schol. I. *Loquimur hic de anno tam Solari, quam Lunari civili, qui ex integris diebus conſtant, non autem de anno Solari, aut Lunari Aſtronomico, qui præter dies, horas quoque & minuta prima, ſecunda, tertia &c. computat, quæ non ſunt hujus loci.*

Schol. II. *Literæ Dominicales ordine retrogrado procedunt, nempe* G, F, E, D, C, B, A, *ut ſi hoc anno litera dominicalis ſit* G *proximo anno erit* F, *tertio* E *&c. uſque ad* A, *quam* G *iterum ſequitur. Ratio eſt, quia cum annus Julianus communis conſtet diebus* 365, *hoc eſt hebdomadibus* 52, *& præterea die* 1, *ſi prima Januarii dies deſignetur litera* A, *etiam ultima Decembris eadem litera* A *deſignabitur. Sit igitur tam primus, quam ultimus illius anni dies Dominicus, ſubſequens annus inchoabitur feria II, dies autem Dominicus hujus anni incidet in diem Januarii ſeptimum; proinde litera Dominicalis non erit* B, *ſed* G. *Tertius annus inchoabitur feria III, adeoque dies Dominicus cadet in diem 6 Januarii, & litera Dominicalis erit*

F, &

F, & ſic de ceteris. *Biſſextilis autem annus duplici litera deſignatur eodemque ordine ·rogrado, ſcilicet* GF, FE, ED *&c. ita ut non* F, *ſed* G *priorem locum obtineat, & ad diem uſque* 23 *Februarii uſurpetur, altera vero* F *deinceps uſque ad finem totius anni intercalaris.*

## PRAXIS I.

*An datus annus ſit Biſſextilis, vel quotus ſit a Biſſextili, invenire.*

Annum Chriſti datum divide per 4; ſi facta diviſione, nihil remanet, ille annus Biſſextilis eſt; ſi quis ſit reſiduus, indicat, quotus annus ſit a Biſſextili. Sic annus, in quo hæc ſcribimus, 1748, quia diviſus per 4, nihil remanet, eſt Biſſextilis. Annus vero proximi Jubilæi 1750 erit ſecundus a Biſſextili. Nam eo diviſo per 4, remanent 2.

Coroll. Diviſionis hujus quotus, reſiduo neglecto, indicat, quot effluxerint anni a Chriſto nato Biſſextiles 437. Sed unitate mulctari debent propter annum 1700, qui Biſſextilis non fuit ex dictis *Defin. 6.* Erunt ergo numerandi 437 — 1 = 436.

## PRAXIS II.

*Cyclum Solarem anni dati invenire.*

Anno Chriſti propoſito adde 9 (decimo namque hujus Cycli anno Chriſtus natus eſt, adeoque jam novem erant expleti). Tum ſumma illa dividatur per 28, numerus ex diviſione reſiduus erit Cyclus Solaris anni dati. Si ex diviſione nihil remanet, erit Cyclus Solaris completus 28. Quotus autem indicat revolutiones hujus Cycli a Chriſti nativitate peractas.

ctas. Eſto hic annus 1748, cui adde 9, fit 1757, quem divide per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari currentis anni. Quotus autem 62 indicat totidem effluxiſſe a Chriſto nato Cyclos Solares.

## PRAXIS III.

*Aureum numerum dati anni invenire.*

Dato Chriſti anno adde unitatem (nam primo Æræ Chriſtianæ anno aureus numerus fuit 2, adeoque unus jam erat abſolutus) ſummam deinde divide per 19, reſiduum erit numerus aureus. Si nihil remanet, erit Cyclus completus, ſive annus 19. Quotus vero indicat, quot Cycli Lunares hactenus ab Æra Chriſtiana fuerint. Quæritur numerus aureus currentis anni 1748. Adde 1, fit 1749, quem divide per 19, remanet 1 pro aureo numero quæſito. Sunt autem a Chriſto nato Cycli Lunares 92, ut diviſionis quotus oſtendit.

## PRAXIS IV.

*In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni dati dies, invenire.*

Ad annum Chriſti præcedentem addantur Biſſextiles elapſi, & a ſumma ſubtrahantur 10. Tum numerus reſiduus dividatur per 7, id quod reſtat ex diviſione dat feriam quæſitam. Si nihil remanet, erit feria ſeptima, ſeu Sabbatum. Scire cupio ex. gr. in quam feriam cadet primus dies anni 1800. En calculi typus

An-

| | |
|---|---|
| *Annus præced.* | 1799 |
| *Biſſext. per Cor.* | 448 |
| | 2247 |
| *Correct. Greg.* | — 10 |
| 7 | 2237 |

319 $\frac{4}{7}$ *reſid.* 4. *indicat Fer.* 4.

Eadem ratione invenitur feria, in quam dato anno incidit propoſitus cujuſcunque menſis dies. Quæritur ex. gr. in quam feriam inciderit dies 17 Auguſti anni 1740, in quo electus fuit Pontifex Maximus Benedictus XIV. Ad annum præcedentem addantur tum Biſſextiles, qui *per Coroll. Prax.* 1. ſunt 433, tum dies elapſi a Kal. Januariis uſque ad diem 16 Auguſti 1740, nempe 229, fit ſumma 2401, ex qua ob correctionem Gregorianam ſubductis 10, & reſiduo diviſo per 7, remanent 4. Fuit ergo Feria IV.

| | |
|---|---|
| *Ann. præced.* | 1739 |
| *Biſſextiles* | 433 |
| *Dies elapſi* | 229 |
| | 2401 |
| *Corr. Gregor.* | — 10 |
| 7 | 2391 |

341 $\frac{4}{7}$ *Reſ.* 4. *indicat Fer.* IV.

PRA-

## PRAXIS V.

*Literam Dominicalem dati anni invenire.*

Inveniatur Feria, qua annus propoſitus inchoatur *per Prax. præc.*, eamque ſubtrahe ex 9, reſiduum dabit literam Dominicalem. Quæritur Litera Dominicalis pro anno proximi Jubilæi 1750. Primus ejus dies *per Prax. præc.* incidet in Feriam V., ſubtrahe 5 ex 9, reſiduum 4 dat literam Dominicalem quarto loco poſitam, ordine literarum directo numerandam, nempe *D*. Similiter ſcire volo literam Dominicalem anni 1755. Feria, in quam incidet primus ejus anni dies, erit per *Prax. præc.* Feria IV. Hanc ſubtrahe ex 9; reſiduum 5 dat literam Dominicalem *E* quinto loco poſitam.

Schol. *Aliæ ſunt praxes pro litera Dominicali inveniendæ, ſed hæc a Blondello allata, eſt omnium breviſſima, atque pulcherrima.*

## PRAXIS VI.

*Dati anni Epactam invenire.*

Inveniatur aureus numerus anni propoſiti per *Prax.* 3., qui multiplicetur per 11, & ex producto auferantur dies 11 pro correctione Gregoriana, reſiduoque diviſo per 30, numerus, qui remanet, erit Epacta quæſita. Ex. gr. quæritur Epacta anni 1750, cujus numerus aureus per *Prax.* 3. eſt 3. Hunc duc in 11 fit 33, ablatiſque 11, reſiduum eſt 22, quod cum dividi nequeat per 30, reſiduum ipſum 22 dat Epactam quæſitam. Anni autem currentis 1748 Epacta eſt * ſeu zero. Nam aureus numerus eſt 1, adeoque ex hac praxi $1 \times 11 = 11 - 11 = 0$.

Schol.

Schol. *Epacta dati anni numerari incipiunt a Kal. Martiis ejuſdem anni. Proinde Epacta hujus* 1748 = 0 *durabit toto Februario anni* 1749.

## PRAXIS VII.

*Menſe ac die datis, ætatem Lunæ invenire.*

Adde ſimul Epactam currentis anni, dies menſis elapſos, & numerum menſium a Martio incluſive, & ex ſumma ſubtracto, ſi fieri poſſit, 30, reſiduum dabit ætatem Lunæ. Scire volo ex. gr. ætatem Lunæ die 15 menſis Decembris hujus anni 1748. Cum ex dictis *in Prax. præc.* Epacta hoc anno ſit = 0, addantur tantum dies 15, & numerus menſium a Martio incluſive, nempe 10, ſumma 25 (ex qua 30 ſubtrahi nequeunt) dat Lunæ ætatem quæſitam. Similiter ſcire cupio ætatem Lunæ die 4 Junii anni 1750. Epacta ejus anni per *Prax. 6.* eſt 22, cui adde dies 4 menſis Junii, & inſuper 4 pro numero menſium a Martio incluſive, fit ſumma 30, ex qua ſi ſubtrahantur 30, nihil remanet; eſt ergo illo die Novilunium.

## PRAXIS VIII.

*Datis Menſe & anni Epacta Novilunii diem invenire.*

Addatur ad Epactam anni dati numerus menſium a Martio incluſive, & ſumma ſubtrahatur ex 30; vel ſi ſumma illa ſuperat 30, ſubtrahatur ex 60, reſiduum indicabit diem Novilunium. Quæritur ex. gr. in quotam Martii diem incidet Novilunium anno 1749. Ad Epactam ejus anni, quæ eſt 11 per *Prax. 6.* adde numerum menſium, qui eſt 1, & ſum-

ſumma 12 ſubtrahatur ex 30, reſiduum 18 indicat Martii Novilunium die 18 futurum. Similiter quæritur Novilunium Decembris 1750. Ejus anni Epacta eſt 22 per *Prax. 6*, & numerus menſium a Martio incluſive 10. Horum ſummam 32 ſubtrahe ex 60, reſiduum 28 dat diem Novilunii.

Schol. I. *Quanquam autem ætas Lunæ per Epactas præciſe definiri non poſſit, nunquam tamen ſolido die a vera Luna ætate aberrat; proinde hæc methodus ſatis tuto in vulgarem uſum recepta eſt.*

Schol. II. *Novilunium Paſchale continetur intra diem 8 Martii & 5 Aprilis incluſive, intra quos terminus, qui Paſchales audiuntur, reperiri debet.*

## PRAXIS IX.

*Dato Æra Chriſtianæ anno Indictionem invenire.*

Anno Chriſti propoſito adde 3, (primus enim Æræ Chriſtianæ annus cœpit Indictione quarta) & aggregatum divide per 15, reſiduum ex diviſione dat annum Indictionis. Si nihil remanet, erit Indictio 15. Sic ad hunc annum 1748 additis 3, fit ſumma 1751, quæ diviſa per 15, dat reſiduum 11 pro Indictione quæſita. Quotus autem 116 indicat Indictiones jam a Chriſto nato completas.

## PRAXIS X.

*Dato Æræ Chriſtianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille ſit, invenire.*

Eſto datus Chriſti annus præſens 1748, quæritur annus Periodi Julianæ, qui illi reſpondet. Anno dato 1748 adde 4713, ſumma 6461 dat annum quæſitum. Ratio eſt, quia primo Chriſti anno elapſi jam erant ejus periodi anni 4713. Co-

Coroll. Si datus quilibet Periodi Julianæ annus dividatur per 28, per 19, & per 15, reſiduum ex prima diviſione erit Cyclus Solis, ex ſecunda Cyclus Lunæ, & ex tertia Cyclus Indictionis. Sic diviſo anno currenti Periodi Julianæ *6461* per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari; per 19, remanent 1 pro Cyclo Lunari, ſive aureo numero; per 15, remanent 11 pro Cyclo Indictionis.

## P R A X I S XI.

*Dato anno ante Chriſti æram, quotus in Periodo Juliana ille ſit, invenire.*

Eſto datus annus ante Chriſtum natum 4004, cui Uſſerius, Pagius, Lancellottus, aliique Chronologi illuſtres Mundi initium tribuunt, quæritur, quotus ille fuerit in Periodo Juliana. Auferatur datus annus 4004 ab annis Periodi Julianæ 4714, in quibus ex dictis *in Prax. præc.* primus Chriſti annus contigit, reſiduum dabit annum Periodi Julianæ, qui primo Mundi anno reſpondet, nimirum 710. Res per ſe patet.

Coroll. Hinc eſt, quod dato quolibet Periodi Julianæ anno, facile innoteſcit, an ille ſit ante, vel poſt Chriſti nativitatem. Nam ſi datus annus major ſit anno 4714, erit annus Periodi Julianæ poſt Chriſtum, ſi minor, erit ante Chriſtum natum. Sic datis Periodi Julianæ annis *6461*, ablatiſque ab illis Periodi Julianæ annis 4713, remanet præſens æræ vulgaris annus 1748. Ablatis autem annis Periodi Julianæ 710 ab annis 4714, habentur anni 4004 ante Chriſti nativitatem.

## PRAXIS XII.

*Datis Cyclis Solis, Lunæ, & Indictionis invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.*

Duc Cyclos datos { *Solis* × 4 8 4 5
*Lunæ* × 4 2 0 0
*Indict.* × 6 9 1 6 }

Et ſummam productorum divide per 7980, reſiduus erit annus Periodi Julianæ, qui datis Cyclis reſpondet. Sit exemplum. Primus Chriſti annus habuit Cyclum Solis 10, Lunæ 2, & Indictionis 4, quæritur annus Periodi Julianæ, cui conveniunt

Cycli { *Solis* 10 × 4845 = 48450
*Lunæ* 2 × 4200 = 8400
*Indict.* 4 × 6916 = 27664 }

*Summa* 84514

Qua diviſa per 7980, reſiduum 4714 dat annum Periodi Julianæ pro primo Chriſti anno.

Similiter hoc anno 1748 Cyclus Solis eſt 21, Lunæ 1, Indictionis 11, quæritur annus Periodi Julianæ.

*Duc* { 21 × 4845 = 101745
1 × 4200 = 4200
11 × 6916 = 76076 }

*Summa* = 172021

Qua diviſa per 7980, reſiduum 6461 dat annum Periodi Julianæ, qui *ex Prax.* 10. reſpondet huic anno 1748.

Schol. *Qua ratione numeri illi determinati* 4845, 4200, *&* 6916, *per quos dati Cycli multiplicari debent, inveniantur, non eſt hujus loci inquirere, cum methodo Analytica opus ſit, quemadmodum ea uſi ſunt Franciſcus a Schooten in Miſcell., Præſletus T.2. lib. 7. Element. Mathem., Joannes Keill. lect. 29. de Cyclis, & alii.*

PRA-

## P R A X I S XIII.

*Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.*

Olympiadum Epocha apud hiſtoricos, præſertim vero Græcos, celeberrima ſemper fuit, cum Græci annos nonniſi per Olympiades, unde anni Olympiaci dicti ſunt, numerare ſolerent. Nam quadriennio quolibet vertente, ſeu quinto quovis redeunte anno, in Olympia Elidis Urbe ludos in honorem Herculis circa ſolſtitium æſtivum maximo populorum concurſu celebrabant. Ludi autem hujuſmodi ab Iphito Elidis rege ſive primum inſtituti, ſive inſtaurati ſunt anno Per. Jul. 3938, & ante Chriſtianam æram anno 776.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur annus Olympiacus, qui illi reſpondet. Si datus annus minor ſit annis 3938, ex his auferatur; qui remanet, dabit annos, qui Olympiadum Epocham præcedunt. Sit annus Per. Jul. 3103, in quo juxta Petavium Moyſes natus eſt, quæritur quot annis ejus nativitas Olympiadum præceſſerit inſtitutionem. Subductis 3103 ex 3937, reſiduum 835 dat annos quæſitos.

Quod ſi datus ſit Per. Jul. annus 4714, in quo incœpit Chriſtiana æra, ut ſæpe dictum eſt, major ſcilicet annis 3938, hos ab illo ſubducito, reſiduum 777 dabit annos Olympiacos: qui ſi dividantur per 4, quotus dat Olympiades completas 194, & annum 1 Olympiadis ineuntis 195. Chriſtus ergo natus eſt anno 1 ab Olympiade 194, ſive anno primo Olympiadis 195.

Coroll. Dato æræ Chriſtianæ anno, ex. gr. 1748, ſi illi addas annos 776, habebis annos Olympiacos, qui huic anno reſpondent, 2524; quibus diviſis per 4, habentur Olympiades 631. Simili ratione annus proximi Jubilæi 1750 erit ſecundus Olympiadis 632.

## PRAXIS XIV.

*Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana ſit, invenire.*

Data ſit Olympias 114, qua ineunte, Alexander M., ut hiſtorici referunt, diem obiit, quæritur quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Multiplica Olympiades 113 elapſas per 4, & producto 452 adde unitatem, ob annum primum Olympiadis 114 ineuntis, fit 453, cui Periodi Julianæ, in quo Alexander M. interiit.

Similiter Diodorus Siculus ſcribit, annum primum Olymp. 94 exeuntem, eſſe annum 780 poſt Trojæ excidium, ſcire volo, quotus ille eſſet Per. Jul. annus. Cum Trojanum excidium ex ejuſdem Diodori Siculi, & Dionyſii Halicarnaſſenſis ſententia acciderit anno Per. Jul. 3530, addantur anni poſt Trojæ caſum elapſi 780 ad annos ipſos 3530, ſumma 4310 dabit annum Per. Jul., qui congruit cum anno 1 Olymp. 94.

Coroll. I. Nota igitur, Trojæ excidium contigiſſe anno Per. Jul. 3530, ita ut primus annus Epochæ Trojanæ fuerit Per. Jul. annus 3531.

Coroll. II. Si ex anno Per. Jul. 4714, æræ Chriſtianæ primo, auferas 4390, reſiduum 324 dat annos, quibus Alexandri M. mors præceſſit Chriſti nativitatem. Sin ab eo auferas 3531, habebis annos Trojani excidii 1183 ante Chriſtum natum. Quæ omnia ex *Coroll. Prax.* 11. plana ſunt.

## PRAXIS XV.

*Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei congruentem invenire.*

Ex hiſtoria Romana ſatis patet, Romanos ab Urbe condita annorum initium, eorumque ſeriem nume-

merare conſueviſſe; unde orta eſt celebratiſſima U.C. Epocha. Quæ quidem duplex eſt, *Varroniana* a M. Varrone dicta, quæ ædificationem Urbis in annum tertium Olympiadis VI. exeuntem refert, cui reſpondet annus Per. Jul. 3960, ſeu 3961 (cum Cal. Januariis ſequentibus ea cœperit); Chriſtianam vero Epocham antecedit annis 753, ita ut in annum U. C. 754 cadat primus Chriſti annus; & *Capitolina*, quæ a faſtis Capitolinis collectis deducta fuit, & Urbem conditam in ſequentem annum Per. Jul. 3962. rejicit. Sed Corn. Tacitus in ſuis Annalibus, Cenſorinus de die Natali, aliique viri docti, quorum ſententiam ſequitur, Epocham U. C. Varronianam Capitolinæ præferunt.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur quotus illi in Epocha U. C. annus congruat. Si propoſitus annus minor erit 3961, facta ſubtractione, reſiduum dabit annos ante Urbem conditam. Sic ab anno 3961 ſubductis 710 (cui Per. Jul. anno Uſſerius initium Mundi tribuit, ut dictum eſt) reſiduum 3251 dat Mundi annos ante U. C. Quod ſi major ſit annis 3961, facta ſubtractione, reſiduum dabit annos ab U. C. Sic ſubductis 3961 ex 4714 (primo æræ Chriſtianæ anno) reſiduum 753 dat annos U. C., qui præcedunt Chriſti nativitatem, quæ ex ſuperius dictis incidit in annum U. C. 754.

## PRAXIS XVI.

*Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Chriſtianæ annos ei congruentes invenire.*

Refert C. Plinius Nat. hiſtor. lib. 8. c. 6. elephantos in Italia primum viſos Pyrrhi regis bello, anno Urbis quadringenteſimo ſeptuageſimo ſecundo; hinc

1. Quæritur, quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Ad U. C. annos ante dictos 472 addantur

anni 3960, qui U. C. Epocham præceſſerunt ex dictis *in Prax. præc.*, aggregatum 4432 dat annum Per. Jul. quæſitum, ut patet.

2. Quæritur, in qua Olympiade, ſeu quoto anno Olympiaco illud acciderit. Ab anno Per. Jul. 4432, ut ſupra, invento, auferantur anni 3938, a quibus Olympiadum Epocha incœpit, reſiduum 494 dat annos Olympiacos, quibus diviſis per 4, habetur annus ſecundus Olympiadis 124 *per Prax.* 13.

3. Demum quæritur, in quotum annum ante, vel poſt Chriſtum natum Pyrrhi bellum, ſeu elephantorum in Italiam adventus inciderit. Ex anno Per. Jul. 4432 ſuperius invento, facile intelligitur *per Coroll. Prax.* 11. id ante æram Chriſtianam contigiſſe. Itaque idem Per. Jul. annus 4432 auferatur ab anno primo Chriſtianæ æræ 4714, reſiduus 282 dabit annos, qui Chriſtianam æram præceſſerunt. Proinde elephantos Italia primum vidit anno Per. Jul. 4432, anno ſecundo ab Olympiade 123, poſt U. C. 472, ante æram Chriſtianam annis 282.

Coroll. Dato U. C. anno, ſive anno Per. Jul. qui ei congruit, facile intelligitur, quotus ille ſit a Trojæ excidio annus. Subductis enim Trojanæ Epochæ annis Per. Jul. 3530 ( *per Cor.* 1. *Prax.* 14. ) ab annis Per. Jul., qui in eadem Per. Jul. reſpondent U. C. annis, reſiduus erit annus quæſitus. Sit exemplum. Dato anno U. C. 537, in quo a Romanis clades maxima ad Traſimenum lacum accepta eſt, Flaminii conſulis temeritate; quæritur, quotus ille fuerit ab excidio Trojæ, ſeu Trojanæ Epochæ annus. Inveniatur annus Per. Jul. congruens U. C. anno 537, qui *per partem* 1. *hujus Prax.* erit 4497; ex hoc ſubducito Trojanæ Epochæ annos 3530 (*per Coroll.* 1. *Prax.* 14. ) reſiduum dat annos, qui interceſſerunt, 967.

PRA-

## PRAXIS XVII.

*Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, ſeu neomeniam Thoth, invenire.*

De æra Nabonaſſari crebra fit mentio tum apud veteres Aſtronomos Ptolomæum, Hipparchum & alios, tum etiam apud celebriores Chronologos: proinde a nobis ea hic omitti omnino non poteſt. Fuit Nabonaſſarus Chaldæorum Rex, a cujus regni Babylonii novam Epocham inſtituerunt, quam Ægyptii ab illis acceperunt. Exordium ejus cadit in Per. Jul. annum 3967, die 26. Febr. ante Chriſtum natum 749.

Quia vero Nabonaſſari æra non annis Julianis, ſed Ægyptiacis conſtat, de his primo eorumque initio agendum eſt. Annus Ægyptiacus dies 365 continet, neglectis 6 illis horis, quibus annus Julianus, præter dies 365, componitur. Unde fit ut, propter omiſſam quadriennio quolibet vertente diem intercalarem, initium anni Ægyptiaci (quod neomenia Thoth dicitur) retro abeat, & per totum annum Julianum vagetur, unum perpetuo anticipans diem; ut ſi hoc anno ex. g. neomenia Thoth incipiat. Calendis Januariis, poſt quatuor annos incipiet die 31 Decembris, & iterum poſt alios quatuor annos, die 30 Decembris, & ſic deinceps; donec demum anno 1461 ad Calendas Jan. rurſus redeat, expletis ſcilicet annis Julianis 1460, qui annos Ægyptiacos 1461 præciſe continent.

In tota autem Periodo Juliana ſunt quinque anni, qui ſpatio annorum 1460 invicem diſtant, in quibus tam primo Januarii die, quam ultimo Decembris neomenia Thoth contingit, nempe

1273, 2733, 4193, 5653, 7113

Dato igitur Per. Jul. anno, inveniri debeat, quoto die initium anni Ægyptiaci, ſeu Thoth incipiat.

Hæc erit regula. Subducatur annus Per. Jul. ex uno ex ſuperioribus numeris, qui ſit proxime major dato, & reſiduum dividatur per 4. Si quotus minor fuerit quam 59, vel aliquid poſt diviſionem ſupererit, addatur quoto unitas, dabit ſumma diem neomeniæ Thoth a Calendis Januariis in anno Juliano numerandum. Si a diviſione nihil reſtat, & quotus eſt major 59, ipſe dabit diem, in quem incidet neomenia Thoth. Sit exemplum: Eſto datus annus Per. Jul. 4714, in quo Chriſti dies natalis illuxit, quæritur, in quoto illius anni die neomenia Thoth contigerit. Subductis annis 4714 a numero proxime majori 5653, remanent 939, quibus diviſis per 4, quotus dat 234, & remanent 3. Adde 1 ad ipſum quotum. Cœpit igitur Thoth die 235 a Calendis Januariis numerandum, hoc eſt die 23 Auguſti. Similiter ſcire volo in quotum anni 1748 diem incidat initium anni Ægyptiaci, ſeu Thoth. Annus Per. Jul., qui huic anno congruit, eſt 6461 *per Prax.* 11. hunc ſubtrahe ex 7113 proxime majori, & reſiduum 652 divide per 4, quotus dat 162 ſine ullo reſiduo. Huic (ob Correct. Gregorianam) adde 11, fit aggregatum 174. Hoc igitur anno 1748 initium anni Ægyptiaci contigit die 23 Junii, diebus ſcilicet 174 a Cal. Januariis.

Demum datus ſit Periodi Julianæ annus 3965, in quo Tobias ſenior natus eſſe dicitur, & quæratur ejus anni neomenia Thoth. Subducto 3965 ex 4193, remanent 228, quem numerum ſi dividas per 4, habebis 57, & nihil remanet. Quia vero hic numerus minor eſt quam 59, nempe quam dies ultimus Februarii, in quo additur biſſextilis dies, ad 57 addenda eſt unitas, & habetur dies quinquageſimus octavus, in quem cadet neomenia Thoth, nempe dies 27 Februarii.

Schol. *Ex ſecundo exemplo patet, poſt Chriſti annum*

*num* 1582, *ad neomeniæ Thoth diem in anno Juliano inventum addendos eſſe*, *ob Correct. Gregorianam*, *dies* 10 *uſque ad annum* 1700, *&* *ab anno* 1700 *uſque ad* 1800 *dies* 11.

## P R A X I S XVIII.

*Dato quolibet Per. Jul. anno*, *quotus ille in æra Nabonaſſari ſit*, *invenire*.

Obſerventur quinque ſequentes anni Per. Jul. *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; quorum primus initium dedit Epochæ Nabonaſſari, reliqui vero annos Nabonaſſareos ſinguli inchoant, ut in *Prax. præc.* explicavimus, eodemque intervallo annorum 1460 invicem diſtant

| *A* | *B* | *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|---|
| $3967^{1}$ | $4193^{2}$ | $5653^{3}$ | $7113^{4}$ | $8573$. |

Dato igitur quovis Per. Jul. anno, videatur ad quodnam intervallum ſpectet, ſive quonam numerorum *A*, *B*, *C* &c. ſit proxime minor. Tum additis unitatibus, qui illi intervallo reſpondent, dematur ex aggregato primus terminus *A*, id quod remanet indicabit quotus ſit annus in æra Nabonaſſari quæſitus. Eſto annus Per. Jul. 4714, qui, ut ſæpe diximus, fuit humanæ ſalutis exordium. Hic ad intervallum ſecundum pertinet, cum ſit major *B*, minor *C*; adde igitur 2 ad 4714, & ex ſumma 4716 deme numerum 3967, reſiduum dat 749. Ergo Chriſtus natus eſt Nabonaſſari anno 749.

Eadem ratione ſcire cupio, quotus Nabonaſſari annus ſit ipſe, qui labitur annus 1748. Cum hic ex *Prax.* 11 ſit annus Per. Jul. 6461, major autem ſit termino *C*, minor vero *D*, ſpectat ad intervallum 3. Adde ergo illi tres unitates, & ex ſumma

ma *6464* tolle terminum *A*, reſiduus numerus 2497 dat annum Nabonaſſareum, qui cum hoc anno æræ Chriſtianæ 1748 congruit.

Ratio regulæ patet ex dictis. Nam quodlibet intervallum eſt annorum 1460. Anni autem Juliani 1460 continent annos Ægyptiacos 1461, & unumquodque intervallum annum unum auget; proinde Per. Jul. anni, qui ex annis Julianis conſtant, augeri debent tot unitatibus, quot ſunt intervalla, ut inter ipſos & annos Ægyptiacos, ſeu Nabonaſſareos habeatur æquatio.

## PRAXIS XIX.

*Nabonaſſari annos in Per. Jul. annos convertere.*

Notentur ſequentes numeri *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, eorumque intervalla 1, 2, 3, 4, & videatur ad quod ex illis pertineat Nabonaſſari annus propoſitus, ab eoque tot demantur unitates, quot illi intervallo conveniunt. Tum reſiduo addantur anni 3967, qui initio æræ Nabonaſſari tribuuntur, ſumma erit annus Per. Jul. quæſitus.

| *A.* | | *B.* | | *C.* | | *D.* | | *E.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 227 | 2 | 1688 | 3 | 3149 | 4 | 4610 |

*Sit exemplum*. Ptolemæus lib. 5. pag. 125. refert, Lunam defeciſſe anno quinto Nabopollaſſari, qui eſt 127 a Nabonaſſaro; quæritur, quoto Per. Jul. anno id acciderit. Cum annorum numerus 127 ad intervallum 1 ſpectet, utpote major *A*, minor vero *B*, auferatur ab eo 1, & reſiduo 126 addatur 3967, ſumma 4093 eſt annus Per. Jul. quæſitus.

Similiter quæritur, quotus ſit in periodo Juliana annus Nabonaſſari 2497. Patet hunc numerum pertine-

tinere ad intervallum 3, cum ſit proxime major C, minor vero D. Auferantur igitur ab eo tres unitates, & reſiduo 2494 addatur numerus 3967; ſumma 6461 eſt annus Per. Jul., qui congruit cum anno Nabonaſſareo dato 2497. Quod *ex Prax. praced.* ſatis apparet. Eſt autem hæc regula converſa præcedentis, ut patet.

## PRAXIS XX.

*In anno Nabonaſſari feriam invenire.*

Reſtat, ut ferias in anno Nabonaſſareo inveſtigemus, quod in hujuſmodi annis ſupputandis, & cum aliis mutuo connectendis, ſæpe fieri expedit.

Anno primo Nabonaſſari neomenia Thoth incidit in feriam IV., proinde ſi ad datum Nabonaſſari annum addas 3, & ſummam dividas per 7, numerus reliquus dabit feriam, in quam cadit Neomenia Thoth. Si nihil remanet, erit Sabbatum. Hic annus 1748 ex dictis in *Prax.*18. dat in æra Nabonaſſari annum 2497, ſi addantur 3, & ſumma 2500 dividatur per 7, remanet 1. Incidit ergo neomenia Thoth hujus anni in fer. 1., hoc eſt in diem Dominicum 23. Junii, ut in *Prax.* 17. vidimus.

Atque hic finis eſto Appendicis hujus Chronologicæ Idib. Decemb. anni Per. Jul. 6461, Olympiade 631, anno ab U. C. 2501., Nabonaſſari 2497, æræ Chriſtianæ 1748, in honorem Dei Opt. Max. & ſtudioſæ juventutis utilitatem.

FINIS.

IN-

# INDEX

## CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones. pag. 7.

CAP. I. De Calculo Integrorum.

Prop. 1. *Dati numeri valorem exprimere.* 9
Prop. 2. *De additione Integrorum.* 11
Prop. 3. *Additionem examinare.* 15
Prop. 4. *De ſubtractione Integrorum.* 16
Prop. 5. *De multiplicatione Integrorum.* 18
Prop. 6. *De diviſione Integrorum.* 25
Prop. 7. *De diviſ. Integr. per num. diviſ. multipl.* 33

Cap. II. De Calculo Denominatorum.

Prop. 1. *De additione numerorum denominatorum.* 36
Prop. 2. *De ſubtractione numerorum denominatorum.* 39
Prop. 3. *De multiplicat. num. denominatorum.* 41
Prop. 4. *De diviſione numerorum denominatorum.* 43

Cap. III. De Calculo Fractorum.

Definitiones. 44
Axiomata. 46
Prop. 1. *Datis duobus numeris, maximam eorum communem menſuram invenire.* 47
Prop. 2. *Fractiones ad minimos terminos reducere.* 48
Prop. 3. *Fractiones ad idem nomen reducere.* 49
Prop. 4. *Fractiones ad aliam dati nominis, & ejuſdem valoris revocare.* 51
Prop. 5. *Fractiones ad integra revocare.* 53
Prop. 6. *Num. integr. in minutiam dati nom. reduc.* ibid.
Prop. 7. *Fract. fract. ad ſimplicem fract. reducere.* 54
Prop. 8. *Fractiones addere.* 55
Prop. 9. *Fractiones ſubtrahere.* 56
Prop. 10. *Fractiones multiplicare.* ibid.
Prop. 11. *Fractiones dividere.* 58

Cap. IV. De Fractionibus Decimalibus.

De-

Definitiones. 60
Prop. 1. *Decimales addere, & ſubtrahere.* 61
Prop. 2. *Decimales multiplicare.* 64
Prop. 3. *Decimales dividere.* 65
Prop. 4. *Integrum, vel fractum in partes decim. reduc.* 67
Prop. 5. *Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.* 68

Cap. V. De extractione Radicum.

Definitio. 69
Prop. 1. *Ex dato numero radicem quadratam, ſeu ſecundam extrahere.* 71
Prop. 2. *Radicem quadr. per approximat. inquirere.* 75
Prop. 3. *Ex dato num. radicem cubicam extrahere.* 77
Prop. 4. *Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.* 81
Prop. 5. *Quæſtiones aliquot reſolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.* 82

Cap. VI. de Regulis Arithmeticis.

Definitiones. 85
Lemmata. 86
Prop. 1. *De regula Proportionum.* ibid.
Prop. 2. *De regula Proportionum compoſita.* 89
Prop. 3. *De regula Proportionum inverſa.* 90
Prop. 4. *Explicantur nonnulla pro regulis Proportionum compendia.* 93
Prop. 5. *De regula Societatis.* 95
Prop. 6. *De regula Alligationis.* 97
Prop. 7. *De regula ſimplicis Poſitionis, ſeu falſi.* 100
Prop. 8. *De regula duplicis Poſitionis.* 102
Prop. 9. *Aurificis furtum in corona Hier. regis deteg.* 107
Prop. 10. *Datis duob. num. tertium proport. invenire.* 109
Prop. 11. *Inter duos num. datos medium proport. inv.* 110
Prop. 12. *Inter duos num. datos duos medios proport. inv.* 111
Prop. 13. *Quæſtiones aliquot practicæ expediuntur.* 112

Cap. VII. De Progreſſionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis. 116

Lem-

Lemmata. 117

Prop.1. *Datis minimo ac maximo progreſſionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire ſummam.* 118

Prop.2. *Datis terminis maximo & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.* 119

Prop.3. *Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis invenire maximum.* 120

Prop.4. *Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.* ibid.

Prop.5. *De numeris Polygonis.* 121

De Progreſſionibus Geometricis.

Lemmata. 123

Prop.6. *Datis minimo & maximo progreſſionis Geometricæ terminis, ac denominatore, ſummam terminorum invenire.* 125

Prop.7. *Datis aliquot progreſſionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cogn., invenire.* 126

Prop.8. *Afferuntur nonnullæ Progreſ.Geometr.quæſt.* 127

Prop 9. *Ex dato rerum num. combinat.omnes inven.* 129

Prop.10. *Ex dato rerum numero permutationes omnes poſſibiles invenire.* 131

Prop.11. *Proponuntur aliqua permutation. problem.* 132

Prop.12. *Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.* 133

Prop. 13. *Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.* 134

Prop.14. *Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proport., quotientes erunt in Harm.proport.* ibid.

Cap.VIII. De Logarithmis,eorumque natura, atque uſu.

Lemmata. 136

Prop.1. *De natura Log-morum,eorumque inventione.* 137

Prop.2. *Si Logarithmus unitatis ſit o, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.* 138

Prop.3. *Si Log-mus unitatis eſt o, differentia Log-morum duor. num. æquatur log-mo quoti eorund. num.* 139

Prop.

Prop.4. *Numeri cujuſcunque Log-mum invenire*. 140

Prop. 5. *Multiplicare duos numeros, qui minores ſint quam* 10000. 143

Prop.6. *Numerum integrum minorem, quam* 10000 *per alium dividere*. 144

Prop.7. *Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire*. ibid.

Prop.8. *Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, ſed numerum* 10, 000, 000 *non excedentibus*. 145

Prop.9. *Datæ fractionis Log-mum invenire*. 147

Prop. 10. *Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non exiſtit, invenire numerum ei reſpondentem*. 149

Prop. 11. *Dato Log-mo defectivo, numerum ei reſpondentem invenire*. 150

Prop. 12. *Dato Logarithmo excedente Logarithmum* 4. 0000000, *numerum ei congruum invenire*. 151

Prop.13. *Dati cujuſcumque Sinus Log-mum invenire*. 152

Prop 14. *Invenire Logarithmum Tangentium, & Secantium dati arcus*. 154

Probl.1. *Dati num. quadr., vel cubum per Logar.inv.* 157

Probl.2. *Inter duos numeros datos invenire quotcumque medios proportionales*. ibid.

Probl.3. *Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Logarithmos expediuntur*. 159

Probl.4. *Data tormenti bellici elevatione, diſtantiam ictus invenire, & e converſo*. 164

Probl.5. *Altitud.Poli tempore æquinoctiorum invenire*. 165

Probl.6. *In linea meridiana Zodiaci ſigna deſcribere*. 166

## APPENDIX

### Praxeon Chronologicarum.

Definitiones. 168

Prax. 1. *An datus annus ſit Biſſextilis, vel quotus ſit a Biſſextili, invenire*. 171

Prax. 2. *Cyclum Solarem anni dati invenire*. ibid.

Prax. 3. *Aureum numerum dati anni invenire*. 172

Prax. 4. *In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni*

anni dati dies, invenire. 172
Prax. 5. *Literam Dominicalem dati anni invenire,* 174
Prax. 6. *Dati anni Epactam invenire.* ibid.
Prax. 7. *Menſe ac die datis, ætatem Lunæ invenire.* 175
Prax. 8. *Datis menſe & anni Epactæ, Novilunii diem invenire,* ibid.
Prax. 9. *Dato Æræ Chriſtianæ anno Indictionem inv.* 176
Prax. 10. *Dato Æræ Chriſtianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille ſit, invenire.* ibid.
Prax. 11. *Dato anno ante Chriſti æram, quotus in Periodo Juliana ille ſit, invenire.* 177
Prax. 12. *Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.* 178
Prax. 13. *Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.* 179
Prax. 14. *Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana ſit, invenire.* 180
Prax. 15. *Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei congruentem invenire.* ibid.
Prax. 16. *Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Chriſtianæ annos ei congruentes invenire.* 181
Prax. 17. *Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, ſeu neomeniam Thoth, invenire.* 183
Prax. 18. *Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in Æra Nabonaſſari ſit, invenire.* 185
Prax. 19. *Nabonaſſari annos in Per. Jul. annos convertere.* 186
Prax. 20. *In anno Nabonaſſari feriam invenire.* 187

464613

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

OB